新北市立板橋高級中學102學年度第二學期數學科雙週解題《第八回》參考解答

高一：(1)設實數a,b,k滿足$a\le b$且$k>0$，試證不等式$a^2+b^2<(a-k)^2+(b+k)^2$必成立。

(2)若全班40人的數學小考平均成績為78分，最低可為0分，最高可為100分，則標準差的最大值為何？

解 (1)$(a-k)^2+(b+k)^2-(a^2+b^2)=2(b-a)k+4k^2>0$

(2)設40人的成績為$x_1,x_1,\cdots,x_{40}$，則總分為3120，標準差為$\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2}{40}-78^2}$

若要標準差最大，則$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2$要最大

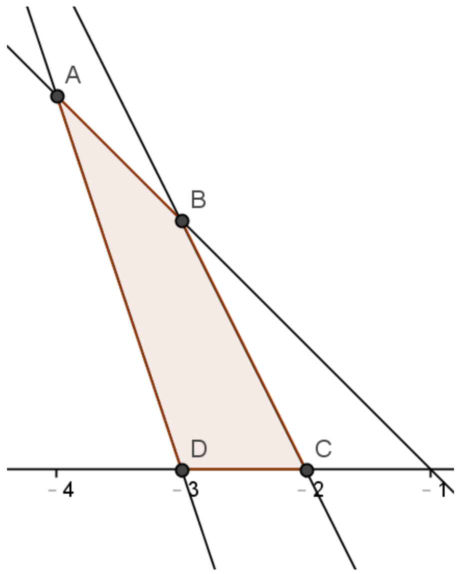
由(1)知，可令$x_1=x_2=\cdots=x_{31}=100$，$x_{32}=20$，$x_{33}=x_{36}=\cdots=x_{40}=0$

此時標準差會最大，其值為$\sqrt{\dfrac{31\times 100^2+20^2}{40}-78^2}=\sqrt{1676}$

高二：設a,b為實數，方程式$x^2+ax+b=0$的二根為α,β，其中$0\le\alpha\le 1,\ 2\le\beta\le 3$，試求$3a+2b$的最大值？

解 設$f(x)=x^2+ax+b$

由題意知$\begin{cases} f(0)\ge 0 \\ f(1)\le 0 \\ f(2)\le 0 \\ f(3)\ge 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} b\ge 0 \\ a+b\le -1 \\ 2a+b\le -4 \\ 3a+b\ge -9 \end{cases}$，得可行解區域如右圖



其中$A(-4,3)$，$B(-3,2)$，$C(-2,0)$，$D(-3,0)$

將上述各點逐一代入$3a+2b$

可知在B點有最大值-5