新北市立板橋高級中學102學年度第二學期數學科<u>雙週解題</u>《第七回》參考解答

高一：設有一個三位數 X，其三個數字均相異，且都不為0。若這三個數字排列所得的六個數的算術平均數恰等於 X，試求出所有這樣的三位數。

解 令 $X=100a+10b+c$，其中 $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

則 $100a+10b+c=\dfrac{222(a+b+c)}{6}=37(a+b+c)$

$\Rightarrow 63a=27b+36c\Rightarrow 7a=3b+4c\Rightarrow\begin{cases}b=a+4t\\c=a-3t\end{cases}$，其中 t 為整數

將 $a=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 一一代入檢驗可得 $(a,b,c)=(4,8,1),\ (5,9,2),\ (5,1,8),\ (6,2,9)$

高二：設 $A=\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}$，$X$，$Y$ 為2階方陣，且 $X+Y=I$，$XY=0$，其中 I 為單位矩陣，0為零矩陣，已知 $aX+bY=A$，其中 a，b 為實數，且 $a>b$，試求：

(1) a　(2) X　(3) X^{20}

解 (1) $\begin{cases}aX+bY=A\\X+Y=I\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{A-bI}{a-b}\\Y=\dfrac{A-aI}{b-a}\end{cases}\Rightarrow XY=-\dfrac{1}{(a-b)^2}(A-bI)(A-aI)$

$\Rightarrow(A-bI)(A-aI)=\begin{bmatrix}1-b&4\\3&2-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-a&4\\3&2-a\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}(1-b)(1-a)+12=0\\4(1-b)+4(2-a)=0\\3(1-b)+3(2-a)=0\\12+(2-b)(2-a)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$（不合）

(2) $X=\dfrac{A-bI}{a-b}=\dfrac{A+2I}{7}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\\\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\end{bmatrix}$

(3) $XY=0\Rightarrow X(I-X)=0\Rightarrow X=X^2$，故 $X^{20}=X=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\\\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\end{bmatrix}$