新北市立板橋高級中學 102 學年度第二學期數學科雙週解題《第六回》參考解答

高一：設 $i=\sqrt{-1}$，試求 $\left(1+\sqrt{2}i\right)^{2013}+\left(1-\sqrt{2}i\right)^{2013}$ 除以12的餘數。

解 $\left(1+\sqrt{2}i\right)^{2013}+\left(1-\sqrt{2}i\right)^{2013}=\sum_{k=0}^{2013}C_k^{2013}\left(\sqrt{2}i\right)^k+\sum_{k=0}^{2013}C_k^{2013}\left(-\sqrt{2}i\right)^k=\sum_{k=0}^{2013}C_k^{2013}\left[\left(\sqrt{2}i\right)^k+\left(-\sqrt{2}i\right)^k\right]$

$$=\sum_{t=0}^{1006}C_{2t}^{2013}\times 2\times(-2)^t=C_0^{2013}\times 2^1-C_2^{2013}\times 2^2+C_4^{2013}\times 2^3-\cdots+C_{2012}^{2013}\times 2^{1007}$$

$$\equiv 1\times 2-0+0-\cdots+0\pmod{12}$$

故 $\left(1+\sqrt{2}i\right)^{2013}+\left(1-\sqrt{2}i\right)^{2013}$ 除以12的餘數為2

另解 令 $a_n=\left(1+\sqrt{2}i\right)^n+\left(1-\sqrt{2}i\right)^n$，則 $a_1=2$，$a_2=-2$，且 $a_{n+2}=2a_{n+1}-3a_n$

令 b_n 為 a_n 除以12的餘數，則 $\langle b_n\rangle: 2,\ 10,\ 2,\ 10, 2, 10, \cdots$，故所求為2

高二：設 $0^\circ<\theta<180^\circ$，試求 $\sin\theta+\dfrac{4}{\sin\theta}$ 的最小值。

解 由算幾不等式知：$\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}\ge 2$，且等號成立於 $\theta=90^\circ$

另一方面，$\dfrac{3}{\sin\theta}\ge 3$，且等號成立於 $\theta=90^\circ$

兩式合併可得：$\sin\theta+\dfrac{4}{\sin\theta}\ge 5$，且等號成立於 $\theta=90^\circ$

另解 令 $t=\sin\theta+\dfrac{4}{\sin\theta}$，由算幾不等式知：$t>4$

則 $\sin^2\theta-t\sin\theta+4=0\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{t-\sqrt{t^2-16}}{2},\ \dfrac{t+\sqrt{t^2-16}}{2}$(不合)

$\because 0<\sin\theta\le 1\ \ \therefore 0<\dfrac{t-\sqrt{t^2-16}}{2}\le 1\Rightarrow 0<t-2\le\sqrt{t^2-16}\Rightarrow t^2-4t+4\le t^2-16\Rightarrow t\ge 5$

等號成立於 $\sin\theta=1$，即 $\theta=90^\circ$

另解 考慮函數 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

若 $0<a<b\le 1$，則 $\dfrac{b-a}{ab}>\dfrac{b-a}{4}\Rightarrow\dfrac{4}{a}-\dfrac{4}{b}>b-a\Rightarrow a+\dfrac{4}{a}>b+\dfrac{4}{b}$，即 $f(a)>f(b)\ge f(1)=5$

$\because 0^\circ<\theta<180^\circ\ \ \therefore 0<\sin\theta\le 1$

因此當 $\sin\theta=1$，即 $\theta=90^\circ$ 時，$\sin\theta+\dfrac{4}{\sin\theta}$ 有最小值5