新北市立板橋高級中學 102 學年度第二學期數學科雙週解題《第五回》參考解答

高一：(1)下列為某人解方程式 $x^4+4k^4=0\,(k>0)$ 的部分過程，試依此找出全部的解。

$$x^4+4k^4=0 \Leftrightarrow x^4=-4k^4 \Leftrightarrow x^2=\pm 2k\ i \text{，其中 } i=\sqrt{-1}$$

令 $x=\alpha+\beta i$，其中 α,β 為實數，則 $x^2=(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta i$

比較係數得 $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=0\\ 2\alpha\beta=\pm 2k^2\end{cases}$

(2)設 $x^4+4k^4=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$，其中 a,b,c,d 為實數。試求數對 (a,b)。

解 (1) $\begin{cases}\alpha^2=\beta^2\\ \alpha^2\beta^2=k^4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^2=k^2\\ \beta^2=k^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha^2=-k^2\\ \beta^2=-k^2\end{cases}$ (不合)

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=k\\ \beta=k\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha=k\\ \beta=-k\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha=-k\\ \beta=k\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha=-k\\ \beta=-k\end{cases}$

故所有的解為 $k+ki,\ k-ki,\ -k+ki,\ -k-ki$

(2) $x^4+4k^4=\left(x-k-ki\right)\left(x-k+ki\right)\left(x+k-ki\right)\left(x+k+ki\right)$

$=\left(x^2-2kx+2k^2\right)\left(x^2+2kx+2k^2\right)$

故數對 $(a,b)=(-2k,2k^2)$ 或 $(2k,2k^2)$

高二：試求 $\dfrac{3^4+2^6}{7^4+2^6}\times\dfrac{11^4+2^6}{15^4+2^6}\times\dfrac{19^4+2^6}{23^4+2^6}\times\dfrac{27^4+2^6}{31^4+2^6}\times\dfrac{35^4+2^6}{39^4+2^6}\times\dfrac{43^4+2^6}{47^4+2^6}$ 的值。

解 $x^4+2^6=x^4+4\times 2^4=\left(x^2-4x+8\right)\left(x^2+4x+8\right)=[(x-2)^2+4][(x+2)^2+4]$

所求 $=\dfrac{(1^2+4)(5^2+4)}{(5^2+4)(9^2+4)}\times\dfrac{(9^2+4)(13^2+4)}{(13^2+4)(17^2+4)}\times\cdots\times\dfrac{(41^2+4)(45^2+4)}{(45^2+4)(49^2+4)}=\dfrac{1^2+4}{49^2+4}=\dfrac{1}{481}$