新北市立板橋高級中學 102 學年度第 2 學期數學科雙週解題《第四回》

高一. 1. 求分別以 9, 25 除 4^{2014} 的餘數。

2. 求 4^{2013} 除以 225 的餘數。

解1. 考慮 4^n 除以 9 的餘數分別爲：$4,7,1,4,7,1,\ldots$，後項爲前項乘 4 後除以 9 之餘數。每三項一個循環，又 $2014=3\times 671+1$，故 4^{2014} 除以 9 之餘數爲 4。
同理 4^n 除以 25 的餘數分別爲：$4,16,14,6,24,21,9,11,19,1,4,16,14,6,\ldots$，每 10 項爲一個循環，故 4^{2014} 和 4^4 除以 25 有相同的餘數 6。

解2. 設 4^{2014} 除以 225 的餘數爲 k。由 1. 的結果知以 9, 25 分別除 k 之餘數分別爲 4, 6。
故 $k=25p+6=18p+(7p+6)$，檢查 $p=0,1,2,\ldots,8$ 時 $7p+6$ 除以 9 之餘數是否爲 4，得 $p=1$，故 $k=31$。

高二. 1. 設 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1c_2,c_3$ 爲正實數且 $a_1^3+a_2^3+a_3^3=b_1^3+b_2^3+b_3^3=c_1^3+c_2^3+c_3^3=1$，試證明 $a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3\le 1$。
(提示：算幾不等式 $\frac{a_1^3+b_1^3+c_1^3}{3}\ge a_1b_1c_1$)

2. 設 $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1z_2,z_3$ 爲正實數，試證明:
$(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(y_1^3+y_2^3+y_3^3)(z_1^3+z_2^3+z_3^3)\ge(x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3)^3$
(提示：可利用 1.)

證1. $1=\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3+b_1^3+b_2^3+b_3^3+c_1^3+c_2^3+c_3^3}{3}=\frac{a_1^3+b_1^3+c_1^3}{3}+\frac{a_2^3+b_2^3+c_2^3}{3}+\frac{a_3^3+b_3^3+c_3^3}{3}$。
由算幾不等式得 $\frac{a_1^3+b_1^3+c_1^3}{3}+\frac{a_2^3+b_2^3+c_2^3}{3}+\frac{a_3^3+b_3^3+c_3^3}{3}\ge a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3$。
兩式合併，得 $a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3\le 1$。

證2. 令 $a_i=\frac{x_i}{\sqrt[3]{x_1^3+x_2^3+x_3^3}}$, $b_i=\frac{y_i}{\sqrt[3]{y_1^3+y_2^3+y_3^3}}$, $c_i=\frac{z_i}{\sqrt[3]{z_1^3+z_2^3+z_3^3}}$, $i=1,2,3$。則 a_i, b_i, c_i 滿足 1. 之條件，故 $a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3\le 1$。
以 x_i, y_i, z_i 表示之得 $\frac{x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3}{\sqrt[3]{(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^3+x_2^3+x_3^3)}}\le 1$，整理得

$$(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(y_1^3+y_2^3+y_3^3)(z_1^3+z_2^3+z_3^3)\ge(x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+x_3y_3z_3)^3.$$