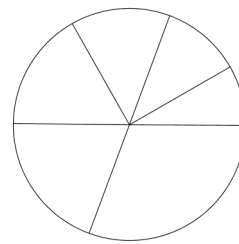


新北市立板橋高級中學 102 學年度第 2 學期數學科雙週解題《第三回》

高一. 如右圖，一圓被分成 6 不同大小的區域，以 5 種顏色將 6 個區域上色，每種顏色可重複使用，亦可不使用。試問有多少不同的塗法，使得相鄰的區域不同色？



解. 將六個區域依逆時針編號 1, 2, 3, 4, 5, 6，並將著色方法進行分類：

1. 1,3,5 同色：有 $5 \times 4^3 = 320$ 。
2. 1,3 同色或 1,5 同： $5 \times 4 \times (4 \times 3 \times 3) \times 2 = 1440$ 。
3. 1,4 同色： $5 \times (4 \times 3)^2 = 720$ 。
4. 皆與 1 異色： $5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1620$ 。

共有 $320 + 1440 + 720 + 1620 = 4100$ 。

高二. $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 的角平分線交 \overline{BC} 於 T 點。

試證明： $\overline{AT}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BT} \cdot \overline{CT}$ 。(可用角平分線性質 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{CT}}$)

證. 令 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $\overline{BT} = r\overline{AB} = rc$, $\overline{CT} = rb$, $\overline{AT} = x$ 。

由餘弦定理有 $\cos \angle BAT = \frac{c^2 + x^2 - (rc)^2}{2xc}$, $\cos \angle CAT = \frac{b^2 + x^2 - (rb)^2}{2xb}$ 。

因 \overline{AT} 為角平分線，所以 $\angle BAT = \angle CAT \Rightarrow \frac{c^2 + x^2 - (rc)^2}{2xc} = \frac{b^2 + x^2 - (rb)^2}{2xb}$

整理得 $(b - c)x^2 = bc(b - c) - r^2bc(b - c)$ 。

所以當 $b \neq c$ 時， $x^2 = bc - (rb)(rc) \Rightarrow \overline{AT}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BT} \cdot \overline{CT}$ 。

而當 $b = c$ 時， $\angle ATC = 90^\circ$ ，由畢氏定理即得此式。