

新北市立板橋高級中學 102 學年度第 2 學期數學科雙週解題《第二回》

高一. 從集合 $\{1, 2, 3, \dots, 60\}$ 中取出三相異數，試求滿足三數乘積為 4 的倍數之方法數共有多少種。

高二. 設實數 a, b 滿足 $a^2 + ab + b^2 = 1$ ，試求 $a^2 + b^2$ 的最大、最小值。

本題有多種解法，提示如下：

法1 判別式法：令 $k = a^2 + b^2$ ，則方程式 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$ 有實數解。

法2 配方法： $a^2 + ab + b^2 = p(a^2 + b^2) + q(\alpha a + \beta b)^2$ 。

法3 變數代換：令 $\begin{cases} x = a \cos \theta - b \sin \theta \\ y = a \sin \theta + b \cos \theta \end{cases}$ ，以 x, y 表示 a, b 並代入 $a^2 + ab + b^2, a^2 + b^2$ 。取適當的 θ 角，使得新的式子中 xy 項之係數為 0。

(以一種方法式解最高可得 8 分，每多 1 種方法多 2 分。)