新北市立板橋高級中學 102 學年度第 2 學期數學科雙週解題《第二回》

高一. 從集合 $\{1,2,3,\ldots,60\}$ 中取出三相異數，試求滿足三數乘積爲 4 的倍數之方法數共有多少種。

解. 三偶: C_3^{30}，兩偶一奇 $C_2^{30}\cdot 30$，一偶兩奇: $15\cdot C_2^{30}$，故共有 $C_3^{30}+C_2^{30}\cdot 30+15\cdot C_2^{30}=23635$。

高二. 設實數 a,b 滿足 $a^2+ab+b^2=1$，試求 a^2+b^2 的最大、最小值。

解1. 令 $k=a^2+b^2$，則 $\begin{cases}a^2+ab+b^2 & =1\\ a^2+b^2 & =k\end{cases}\Rightarrow ab=1-k\Rightarrow b=\frac{1-k}{a}\Rightarrow a^2+(\frac{1-k}{a})^2=k$
$\Rightarrow a^4-ka^2+(1-k)^2=0$，故 $x=a^2$ 爲方程式 $x^2-kx+(1-k)^2=0$ 之解，因此其判別式非負，即 $k^2-4(1-k)^2\geq 0\Rightarrow 3k^2-8k+4\leq 0\Rightarrow(3k-2)(k-2)\leq 0\Rightarrow\frac{2}{3}\leq k\leq 2$。
檢查等號是否成立，若 $k=2$，則 $a^4-2a^2+1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow(a,b)=(1,-1)$ 或 $(-1,1)$；若 $k=\frac{2}{3}$，則 $a^4-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{9}=0\Rightarrow a^2=\frac{1}{3}\Rightarrow(a,b)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ 或 $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$。
故最大、最小值分別分 $\frac{2}{3},2$。

解2. $a^2+ab+b^2=k(a^2+b^2)+(1-k)a^2+ab+(1-k)b^2$。
欲使 $(1-k)a^2+ab+(1-k)b^2$ 爲某式之平方，取 k 使得 $D=1^2-4(1-k)^2=0$，即 k 可爲 $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$。
$1=a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a+b)^2\Rightarrow a^2+b^2\leq 2$，且當 $a=-b$ 時等號成立。
$1=a^2+ab+b^2=\frac{3}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{2}(a-b)^2\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{2}{3}$，且當 $a=b$ 時，等號成立。故最大、最小值分別分 $2,\frac{2}{3}$。

解3. 令 $\begin{cases}x & =\frac{1}{\sqrt{2}}a-\frac{1}{\sqrt{2}}b\\ y & =\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b\end{cases}$，則 $\begin{cases}a & =\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\\ b & =\frac{-1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\end{cases}$, $a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2$, $a^2+b^2=x^2+y^2$。
由 $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2=1$，同解2論述可得 $\frac{2}{3}\leq x^2+y^2\leq 3$，兩等號分別在 $x=0,y=0$ 時成立，故最大、最小值分別爲 $3,\frac{2}{3}$。