新北市立板橋高級中學 102 學年度第 2 學期數學科雙週解題《第一回》

高一. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係 $a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n$，其中 c, d 爲實數，n 爲任意正整數。

1. 試證明：若方程式 $x^2 - cx - d = 0$ 之解爲 $x = \alpha$ 二重實根且 $\alpha \neq 0$，則數列 $\langle b_n \rangle = \left\langle \frac{a_n}{\alpha^n} \right\rangle$ 爲一等差數列。(5分)
2. 若 $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ 且 $a_1 = 0, a_2 = 1$，試求 a_n 的一般式。
   (以 n 表示 a_n，例 $2n-1, n+(-1)^n$)(5分)

高二. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係 $a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n$，其中 c, d 爲實數，n 爲任意正整數。

1. 試證明：若方程式 $x^2 - cx - d = 0$ 有兩相異非零實根 α, β，則數列 $\langle t_n \rangle = \langle a_{n+1} - \beta a_n \rangle, \langle s_n \rangle = \langle a_{n+1} - \alpha a_n \rangle$ 爲兩等比數列，且其公比分別爲 α, β，即 $\begin{cases} a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{cases}$ 。(5分)
2. 若 $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ 且 $a_1 = 1, a_2 = 1$，試求 a_n 的一般式。(5分)