新北市立板橋高級中學 102 學年度第 1 學期數學科雙週解題《第一回》解析

高一. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係 $a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n$，其中 c, d 爲實數，n 爲任意正整數。

1. 試證明：若方程式 $x^2 - cx - d = 0$ 之解爲 $x = \alpha$ 二重實根且 $\alpha \neq 0$，則數列 $\langle b_n \rangle = \left\langle \frac{a_n}{\alpha^n} \right\rangle$ 爲一等差數列。(5分)
2. 若 $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ 且 $a_1 = 0, a_2 = 1$，試求 a_n 的一般式。
   (以 n 表示 a_n，例 $2n-1, n+(-1)^n$)(5分)

證1. $x^2 - cx - d = 0$ 之解爲 $x = \alpha$ 重根，由根與係數關係知 $c = 2\alpha, d = -\alpha^2$。
$b_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{\alpha^{n+2}} = \frac{2\alpha a_{n+1} - \alpha^2 a_n}{\alpha^{n+2}} = \frac{2a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = 2b_{n+1} - b_n \Rightarrow b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n$，故 b_n 爲等差數列。

解2. $x^2 - 6x + 9 = 0$ 之解爲 $x = 3$ 重根，由 1. 知 $\left\langle \frac{a_n}{3^n} \right\rangle$ 爲一等差數列，而其首項爲 0，次項爲 $\frac{1}{9}$，故 $\frac{a_n}{3^n} = \frac{n-1}{9} \Rightarrow a_n = n \cdot 3^{n-2} - 3^{n-2}$。

高二. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係 $a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n$，其中 c, d 爲實數，n 爲任意正整數。

1. 試證明：若方程式 $x^2 - cx - d = 0$ 有兩相異非零實根 α, β，則數列
   $\langle t_n \rangle = \langle a_{n+1} - \beta a_n \rangle, \langle s_n \rangle = \langle a_{n+1} - \alpha a_n \rangle$ 爲兩等比數列，且其公比分別爲 α, β，
   即 $\begin{cases} a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{cases}$。(5分)
2. 若 $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ 且 $a_1 = 1, a_2 = 1$，試求 a_n 的一般式。(5分)

證1. 方式式 $x^2 - cx - d = 0$ 之兩根爲 α, β，由根與係數關係知 $c = \alpha + \beta, d = -\alpha\beta$。因此 $a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$，將 αa_{n+1} 移項，整理得 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta a_{n+1} - \alpha\beta a_n = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$
$\Rightarrow a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$。同理移項 αa_{n+1} 整理可得 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$。

解2. 方程式 $x^2 - x - 6 = 0$ 之解爲 $x = 3$ 或 -2，由 1. 可得
$a_{n+1} - 3a_n = (-2)(a_n - 3a_{n-1}) = (-2)^2(a_{n-1} - 3a_{n-2}) = \ldots = (-2)^{n-1}(a_2 - 3a_1) = (-2)^n$。
$a_{n+1} + 2a_n = 4 \cdot (a_n + 2a_{n-1}) = 3^2 \cdot (a_{n-1} + 2a_{n-2}) = \ldots = 3^{n-1}(a_2 + 2a_1) = 3^n$。
解聯立方程式 $\begin{cases} a_{n+1} - 3a_n &= (-2)^n \\ a_{n+1} + 2a_n &= 3^n \end{cases}$ 得 $a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}$。