新北市立板橋高級中學 102 學年度第一學期數學科雙週解題《第八回》參考解答

高一：設$u=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$，$v=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$，且$x=u+v$。

(1)試求u^3+v^3與uv的值。

(2)已知x為一個整係數三次方程式的有理根，試求x的值。

解 (1)$u^3+v^3=(20+14\sqrt{2})+(20-14\sqrt{2})=40$，$uv=\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}=\sqrt[3]{8}=2$

(2)$x^3=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=40+3\cdot 2\cdot x \Rightarrow x^3-6x-40=0$

$\Rightarrow (x-4)(x^2+4x+10)=0 \Rightarrow x=4,\ -2\pm\sqrt{6}i$ (不合)

高二：設過$P(2,1)$的直線與x軸,y軸的正向交於A,B兩點，且過P分別向x軸,y軸作垂線，其交點分別為C,D，令$\angle BAO=\theta$，其中O為原點。

(1)試證：$\overline{CA}+\overline{AP}=\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$；$\overline{DB}+\overline{BP}=2\times\dfrac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}$。

(2)試求ΔOAB周長的最小值。

解 (1)$$\overline{CA}+\overline{AP}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{DB}+\overline{BP}=2(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})=2(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta})=2(\frac{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})$$

$$=2\times\frac{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})}=2\times\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=2\times\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}$$

(2)令$\tan\frac{\theta}{2}=k\ (0<k<1)$

$$\text{則}\ \Delta OAB\ \text{周長}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+2\times\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}+3=\frac{1}{k}+2\times\frac{1+k}{1-k}+3$$

$$=\frac{1-k}{k}+1+2\times(1+\frac{2k}{1-k})+3=\frac{1-k}{k}+\frac{4k}{1-k}+6$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1-k}{k}\times\frac{4k}{1-k}}+6=2\times 2+6=10$$

等號成立於$\dfrac{1-k}{k}=\dfrac{4k}{1-k}\Rightarrow(1-k)^2=4k^2\Rightarrow 3k^2+2k-1=0\Rightarrow k=\dfrac{1}{3}$或$-1$(不合)