新北市立板橋高級中學102學年度第一學期數學科雙週解題《第七回》參考解答

高一：(1)若 $x^3+3x^2+6x+20=y^3+cy+d$，其中 $y=x+k$，則數對 $(k,c,d)=?$

(2)設 s 為方程式 $x^3+3x^2+6x+20=0$ 的實根，t 為方程式 $x^3+3x-16=0$ 的實根，試問 $s+t$ 的值。

解 (1) $x^3+3x^2+6x+20=(x+k)^3+c(x+k)+d=x^3+3kx^2+(3k^2+c)x+k^3+ck+d$

比較係數可得：$(k,c,d)=(1,3,16)$

(2)承上可知：$s+1$ 為方程式 $x^3+3x+16=0$ 的實根，

令 $g(x)=x^3+3x$，由 $g(-x)=-g(x)$，可知 $y=g(x)$ 的圖形對稱於原點

$\begin{cases} y=x^3+3x \\ y=-16 \end{cases}$ 兩圖形交點的 x 坐標為 $s+1$；$\begin{cases} y=x^3+3x \\ y=16 \end{cases}$ 兩圖形交點的 x 坐標為 t

故 $s+1+t=0$，即 $s+t=-1$

另解 (2)令 $r=s+1$，則 r 為方程式 $x^3+3x+16=0$ 的實根，即 $r^3+3r+16=0$

又 t 為方程式 $x^3+3x-16=0$ 的實根，即 $t^3+3t-16=0$

兩式相加可得：$(r^3+3r+16)+(t^3+3t-16)=0 \Rightarrow (r+t)(r^2-rt+t^2+3)=0$

$\because r^2-rt+t^2+3=\frac{1}{4}[(r+t)^2+3(r-t)^2]+3>0 \quad \therefore r+t=0$，即 $s+t=-1$

高二：設 $ABCD$ 為一凸四邊形，且 $\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{BC}=8$，試求：

(1)凸四邊形 $ABCD$ 面積的最大值？

(2)若凸四邊形 $ABCD$ 面積為8，則 $\overline{AC}=$？

解 (1) $ABCD$ 面積 $=\Delta ADB+\Delta CBD=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DB}\cdot\sin\angle ADB+\frac{1}{2}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\angle CBD$

$\le\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DB}+\frac{1}{2}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{BD}$（等號成立於 $\sin\angle ADB=90^\circ=\sin\angle CBD$）

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot(\overline{AD}+\overline{CB})=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot(8-\overline{BD})=-\frac{1}{2}(\overline{BD}-4)^2+8$

≤ 8（等號成立於 $\overline{BD}=4$）

(2)若凸四邊形 $ABCD$ 面積為8，即凸四邊形 $ABCD$ 面積為最大值

此時，$\sin\angle ADB=90^\circ=\sin\angle CBD$，且 $\overline{BD}=4$

作矩形 $BCED$，則 $\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{BC}=4$，$\overline{CE}=\overline{BD}=4$

故 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{CE}^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$