新北市立板橋高級中學 102 學年度第一學期數學科雙週解題《第六回》參考解答

高一：設 x, y, z 為正實數，且 $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=xy+yz+zx$。

當 $x+y=m$ 時，$xy+2z$ 有最小值 n，試問 m, n 的值。

解 $xy+yz+zx=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}\Rightarrow xyz=1$

$\frac{xy+2z}{2}\ge\sqrt{2xyz}\Rightarrow xy+2z\ge 2\sqrt{2}$，等號成立於 $xy=2z$，即 $xyz=2z^2=1\Rightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x+y+z=xy+z(x+y)\Rightarrow x+y+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\Rightarrow(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(x+y)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x+y=\sqrt{2}+1$

故 $m=\sqrt{2}+1, n=2\sqrt{2}$ 的值。

解 $xy+yz+zx=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}\Rightarrow xyz=1$

令 $x+y+z=xy+yz+zx=a$，則 x, y, z 為方程式 $r^3-ar^2+ar-1=0$ 的三個根

由 $r^3-ar^2+ar-1=(r-1)\left[r^2+(1-a)r+1\right]$ 可知：方程式 $r^3-ar^2+ar-1=0$ 有一根為 1

故下列情況必有一成立：$z=1$ 或 $x=1$ 或 $y=1$

(A)若 $z=1$，則 $xy=1$，而 $xy+2z=3$

(B)若 $x=1$，則 $yz=1$，而 $xy+2z=y+2z=\frac{1}{z}+2z\ge 2\sqrt{2}$

等號成立於 $\frac{1}{z}=2z$ 時，即 $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$，此時 $x+y=1+y=1+\frac{1}{z}=1+\sqrt{2}$

(C)若 $y=1$，則 $zx=1$，而 $xy+2z=x+2z=\frac{1}{z}+2z\ge 2\sqrt{2}$

等號成立於 $\frac{1}{z}=2z$ 時，即 $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$，此時 $x+y=x+1=\frac{1}{z}+1=\sqrt{2}+1$

綜合上述討論：當 $x+y=1+\sqrt{2}$ 時，$xy+2z$ 的最小值為 $2\sqrt{2}$

另解 (B)若 $x=1$，則 $yz=1$，而 $xy+2z=y+2z=\frac{1}{z}+2z=\frac{1+2z^2}{z}\overset{令}{=}k$，即 $2z^2-kz+1=0$

由方程式有實根可知：判別式 ≥ 0，即 $k^2-8\ge 0\Rightarrow k\ge 2\sqrt{2}$ 或 $k\le -2\sqrt{2}$ (不合)

當 $k=2\sqrt{2}$ 時，即 $2z^2-2\sqrt{2}z+1=0\Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}$，此時 $x+y=1+y=1+\frac{1}{z}=1+\sqrt{2}$

新北市立板橋高級中學 102 學年度第一學期數學科雙週解題《第六回》參考解答

高二：如圖，一煙火在地表施放處垂直升空35公尺時爆炸，已知煙火爆炸半徑為21公尺，試問觀賞者(身高不計，且處於同一地表)位於離煙火施放處多少公尺可以有最大視角？(視角即為觀賞者分別與煙火最高點及煙火最低點連線之夾角)

解　令觀察者為 A，煙火施放處為 B，煙火最低點為 C，煙火最高處為 D，$\overline{AB}=x$，

則 $\overline{BC}=35-21=14$，$\overline{BD}=35+21=56$，

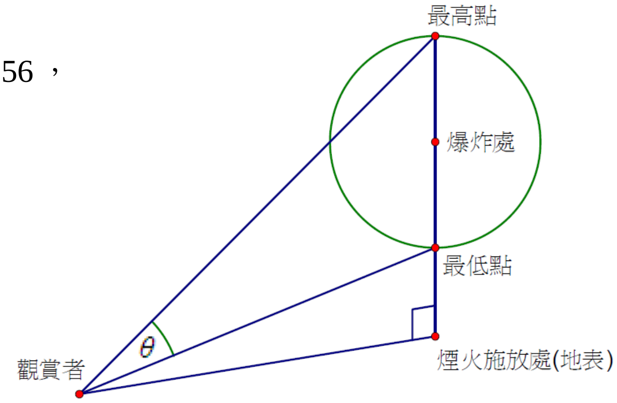
且 $\tan\angle DAC=\tan\left(\angle DAB-\angle CAB\right)=\dfrac{\tan\angle DAB-\tan\angle CAB}{1+\tan\angle DAB\tan\angle CAB}=\dfrac{\frac{56}{x}-\frac{14}{x}}{1+\frac{56}{x}\cdot\frac{14}{x}}=\dfrac{42}{x+\frac{784}{x}}$，

由算幾不等式知：$\dfrac{x+\frac{784}{x}}{2}\ge\sqrt{x\cdot\frac{784}{x}}$，即 $x+\dfrac{784}{x}\ge 56$，

故 $\tan\angle DAC=\dfrac{42}{x+\frac{784}{x}}\le\dfrac{42}{56}=\dfrac{3}{4}$

等號成立於 $x=\dfrac{784}{x}$，即 $x=28$

故觀賞者離煙火施放處 28 公尺可以有最大視角



解　過觀察者 A、煙火最高處 D、煙火最低處 C 作一外接圓，並令其圓心為 O，此時視角為 $\dfrac{1}{2}\angle DOC$

不難發現：若圓心 O 離直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 越近，則 $\angle DOC$ 越大，即外接圓越小，其視角越大

因此視角最大值發生在外接圓與地表(地平線)相切時

令此時觀察者 A 距離煙火施放處 B 為 x 公尺，則 $35^2-x^2=21^2\Rightarrow x=28$

解　不失一般性，設觀察者 $A(a,0)$，其中 $a\ge 0$、煙火最高處 $D(0,56)$、煙火最低處 $C(0,14)$

過觀察者 A、煙火最高處 D、煙火最低處 C 作一外接圓，並令其圓心為 $O(b,35)$

顯然，若圓心 O 離直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 越近，則 $\angle DOC$ 越大，即 b 越小，其視角越大(視角$=\dfrac{1}{2}\angle DOC$)

直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 的中垂線方程式：$y-7=\dfrac{a}{14}(x-\dfrac{a}{2})$(過點$(\dfrac{a}{2},7)$，且斜率為$\dfrac{a}{14}$)，即 $ax-14y=\dfrac{a^2}{2}-98$

將圓心 $O(b,35)$ 代入上式得 $ab-490=\dfrac{a^2}{2}-98\Rightarrow b=\dfrac{a+\frac{784}{a}}{2}\ge\sqrt{a\cdot\frac{784}{a}}=28$

等號成立於 $a=\dfrac{784}{a}$，即 $a=28$，故觀察者 A 距離煙火施放處 B 為 28 公尺時，有最大視角