新北市立板橋高級中學 102 學年度第一學期數學科雙週解題《第五回》參考解答

高一：設 a， b， c 為一個三角形的三邊長，且 m 為一常數。

已知 $a+\dfrac{m}{a}=b+\dfrac{m}{b}=c+\dfrac{m}{c}$，試證此三角形為等腰三角形。

解　設此三角形不為等腰三角形，即 $a\neq b$， $b\neq c$， $c\neq a$

$a+\dfrac{m}{a}=b+\dfrac{m}{b}\Rightarrow a-b=\dfrac{m}{b}-\dfrac{m}{a}=\dfrac{m(a-b)}{ab}\Rightarrow(a-b)(1-\dfrac{m}{ab})=0\Rightarrow a=b$（不合）或 $ab=m$

同理可得： $bc=m$ 及 $ca=m$　　$\therefore ab=bc=ac=m\Rightarrow a=b=c$（矛盾）

故此三角形為等腰三角形

解　令 $a+\dfrac{m}{a}=b+\dfrac{m}{b}=c+\dfrac{m}{c}=k$，可得 $\begin{cases}a^2-ka+m=0\\ b^2-kb+m=0\\ c^2-kc+m=0\end{cases}$

上式表示 a， b， c 為方程式 $x^2-kx+m=0$ 的根

$\because$ 方程式 $x^2-kx+m=0$ 最多有兩個實根　　$\therefore a$， b， c 至少有兩個相等

故此三角形為等腰三角形

高二：(1)設 k 為正實數，且 $\sin\theta+\cos\theta=k\sin(\theta+\phi)$，試求 k 的值及 ϕ 的最小正同界角。

(2)設 $-180^\circ<\theta<180^\circ$，但 $\theta\neq-90^\circ$， 0°， 90°，

試求 $\left|\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}+\cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}+\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right|$ 的最小值。

解　(1) $\sin\theta+\cos\theta=k\sin(\theta+\phi)=k\sin\theta\cos\phi+k\cos\theta\sin\phi\Rightarrow k\cos\phi=k\sin\phi=1$

$\Rightarrow k^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=2\Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$（負不合）$\Rightarrow\begin{cases}\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\phi=45^\circ+360^\circ\cdot n$， $n\in\mathbb{Z}$

(2)令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，則 $t=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)\Rightarrow-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$，但 $t\neq1, -1$

$$\text{原式}=\left|\sin\theta+\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|$$

$$=\left|\sin\theta+\cos\theta+\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta\cos\theta}\right|=\left|t+\frac{2(t+1)}{t^2-1}\right|=\left|t+\frac{2}{t-1}\right|$$

(A)當 $1<t\leq\sqrt{2}$ 時，原式 $=\left|t-1+\dfrac{2}{t-1}+1\right|\geq\left|2\sqrt{(t-1)(\dfrac{2}{t-1})}+1\right|=2\sqrt{2}+1$

(B)當 $-\sqrt{2}\leq t<1$，但 $t\neq-1$ 時，原式 $=\left|1-t+\dfrac{2}{1-t}-1\right|\geq\left|2\sqrt{(1-t)(\dfrac{2}{1-t})}-1\right|=2\sqrt{2}-1$

綜合上述討論，可得 $\left|\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}+\cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}+\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right|$ 的最小值為 $2\sqrt{2}-1$