新北市立板橋高級中學 102 學年度第 1 學期數學科雙週解題《第四回》解析

高一. 設 $f(x)=x^3+2x+1$，且 α,β,γ 爲 $f(x)=0$ 之相異三根。
試求 $(\alpha^2-2)(\beta^2-2)(\gamma^2-2)$。

解析. 由根與係數關係知 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma & =0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha & =2\\ \alpha\beta\gamma & =-1\end{cases}$ 。

所求展開得 $\alpha^2\beta^2\gamma^2-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-8$。

其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-4$，

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=4$。

故所求 $=(-1)^2-2\cdot 4+4\cdot(-4)-8=-31$。

另解.

$$\begin{aligned}(\alpha^2-2)(\beta^2-2)(\gamma^2-2)&=(\alpha-\sqrt{2})(\beta-\sqrt{2})(\gamma-\sqrt{2})(\alpha+\sqrt{2})(\beta+\sqrt{2})(\gamma+\sqrt{2})\\ &=(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-\gamma)(-\sqrt{2}-\alpha)(-\sqrt{2}-\beta)(-\sqrt{2}-\gamma)\\ &=f(\sqrt{2})\cdot f(-\sqrt{2})\\ &=(4\sqrt{2}+1)(-4\sqrt{2}+1)\\ &=1-32=-31.\end{aligned}$$

高二.

1. 設 $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+2^2}+\sqrt{(x-5)^2+(-2)^2}$，試求 $f(x)$ 的最小值。
2. 設 $g(x)=\sqrt{x^2-40x+4^x-13\cdot 2^{x+1}+569}-\sqrt{x^2-4x+4^x-5\cdot 2^{x+2}+104}$，試求 $g(x)$ 的最大值。

解析1. 令 $P(x,0)$, $A(2,-2)$, $B(5,2)$，則 $f(x)=\overline{PA}+\overline{PB}$。

由三角不等式知 $\overline{PA}+\overline{PB}\geq\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$。

當 P 爲 $\overline{AB}$ 線段和 x 軸之交點時，等號成立，故最小值爲 5。

解析2. 注意 $g(x)=\sqrt{(x-20)^2+(2^x-13)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(2^x-10)^2}$。

令 $P(x,2^x)$, $A(20,13)$, $B(2,10)$，則 $g(x)=\overline{PA}+\overline{PB}\leq\overline{AB}=3\sqrt{37}$。

考慮 Γ 爲 $y=2^x$ 之函數圖形，則 P 在 Γ 上，A 在曲線 Γ 右方，B 在曲線 Γ 左方。欲達最小值(使三角不等式等號成立)，則需 $P-B-A$ 三點共線(且 B 在 $\overline{PA}$ 線段上)。連接 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 Γ 交於兩點，其一在 $\overline{AB}$ 線段，另一個位於第二象限之交點，即達最小值之點 P 所在。