新北市立板橋高級中學 102 學年度第 1 學期數學科雙週解題《第三回》解析

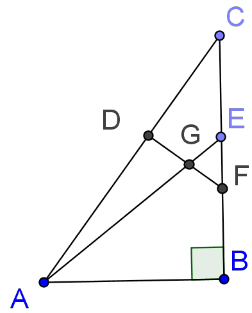
高一. 今有 2013 個數 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2013}$ 繞成一圈，若任意相鄰連續 99 個數之和皆為定值，且 $a_{64} = 64$, $a_{128} = 128$, $a_{256} = 256$, $a_{512} = 512$, $a_{1024} = 1024$，試求 a_{1007} 之值。

解析. $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+98} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+99} \Rightarrow a_{k+99} = a_k$，故 $a_{1007} = a_{908} = a_{809} = a_{710} = a_{611} == a_{512} = 512$。

高二.

1. 試證明：若 α, β 為銳角且 $\alpha + \beta < 90°$，則 $\tan\alpha + \tan\beta \geq 2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$。
2. 紙上有一邊長為 1 的正三角形 ABC 中及一以為 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑之圓弧 $\overparen{BC}$。設 D、E 分別在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$，且將這張紙沿 $\overline{DE}$ 對摺，恰使得 A 落在 $\overparen{BC}$ 上。試求 $\triangle ADE$ 面積的最小值。

證1. 不失一般性假設 $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha \geq \frac{\alpha+\beta}{2} \geq \beta$。
如右圖：$\angle B = 90°$, $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$, $\angle BAE = \alpha$, $\angle EAC = \beta$, $\overline{AF}$ 為 $\angle BAC$ 之角平分線。其中五邊形 $ABEGD$ 之面積 $\geq$ 四邊形 $ABFD$。即 $\frac{1}{4}(\tan\alpha + \tan\beta) \geq \frac{2}{4}\tan\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta \geq 2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$。



證2. 令對摺後，A 所落的位置為點 A', M 為 $\overline{AA'}$ 中點，$\angle A'AB = \alpha$, $\angle A'AC = \beta$。
則有 $\alpha + \beta = 60°$, $\overline{DE}$ 垂直且平分 $\overline{AA'}$, $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, $\overline{DM} = \frac{1}{2}\tan\alpha$, $\overline{EM} = \frac{1}{2}\tan\beta$。而 $\triangle ADE = \triangle ADM + \triangle AEM$ (皆為面積) $\Rightarrow \triangle ADE = \frac{1}{8}(\tan\alpha + \tan\beta) \geq \frac{1}{4}\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{12}$，且其中僅當 $\alpha = \beta = 30°$ 時，等號成立。