新北市立板橋高級中學 102 學年度第 1 學期數學科雙週解題《第二回》解析

高一. 若 $2 \times 5 \times 8 \times 11 \times \cdots \times 6038 = 10^n \times a$，其中 a, n 爲正整數，且 $10 \nmid a$，則 $n =$?

解析. $10 = 2 \times 5$，其中每兩項至少有一個 2 因數，數量遠比 5 的多，僅需數考慮 5 的因數出現幾次。觀察 $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, \ldots$，每 5 項必出現一個 5 的倍數。即 $5 \mid 3n-1$ 之解爲 $n = 2, 7, 12, 17, \ldots$，可表示成 $5k-3$ 之數，而 $6038 = 2013 \cdot 3 - 1$。故其中 5 的倍數有 $\left[\frac{2013-2}{5}\right] + 1 = 403$。

而這 403 項，又有幾項如 50, 125, 200 等不只含有一個 5，而是 5^2 之倍數。

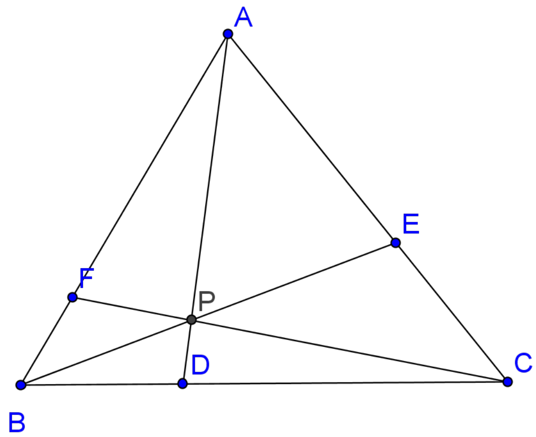
$25 \mid 3n-1$ 之解爲 $n = 17, 42, 67, \ldots$，其公差爲 25，即每 25 項會出現一個 25 的倍數，故 25 的倍數有 $\left[\frac{2013-17}{25}\right] + 1 = 80$ (個)。

再考慮 125 的倍數：$125 \mid 3n-1 \Rightarrow n = 42 + 125k$。故有 $\left[\frac{2013-42}{125}\right] + 1 = 16$ (個)。

625 的倍數則有 $\left[\frac{2013-417}{625}\right] + 1 = 3$ (個)，3125 的倍數 $\left[\frac{2013-1042}{3125}\right] + 1 = 1$。

因此 $n = 403 + 80 + 16 + 3 + 1 = 503$。

高二. 如圖，三角形 $\triangle ABC$ 中內部一點 P 與三頂點連線，將三角形分成六個區域，已知各區域面積分別爲 $\triangle APF = 135$, $\triangle BPF = 45$, $\triangle BPD = 40$, $\triangle CPE = 144$，試求 $\triangle ABC$ 之面積。



解析. 令 $\triangle APE$ 和 $\triangle CPD$ 的面積分別爲 x, y。同高之三角形之面積爲底邊之比，同底之三角形面積之比爲高之比，故有 $\frac{135}{45} = \frac{x+144}{y+40}$，$\frac{40}{y} = \frac{180}{x+144} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y &= -24 \\ 2x - 9y &= -288 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (216, 80)$。

故 $\triangle ABC$ 之面積爲 $= 135 + 45 + 40 + 80 + 144 + 216 = 660$。