

新北市立板橋高級中學 102 學年度第 1 學期數學科雙週解題《第一回》

- 高一.
1. 化簡 $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023+\sqrt{2024}}} + \frac{1}{\sqrt{2024+\sqrt{2025}}}$ 。(5分)
 2. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例： $[2.5] = 2$, $[3.1] = 3$ 。
試求 $\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}} \right]$ 。(5分)
提示：對自然數 n ，有 $\sqrt{n-1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ 。

- 高二.
1. 已知一圓柱，其高和底圓之直徑的和為 9，試求其體積的最大可能。(5分)
提示：算幾不等式：若 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$ ，則
 $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ ，且等號僅當 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 時成立。
 2. 設 θ 為銳角，試求 $\sin^2 \theta \cos \theta$ 的最大值。(5分)
提示： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$