新北市立板橋高級中學 102 學年度第 1 學期數學科雙週解題《第一回》解析

高一. 1. 化簡 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$。(5分)

2. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例：$[2.5]=2$, $[3.1]=3$。
試求 $\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2025}}\right]$。(5分)
提示：對自然數 n，有 $\sqrt{n-1}+\sqrt{n}<2\sqrt{n}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$。

解析1. $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，故原式 $=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2025}-\sqrt{2024}\right)=\sqrt{2025}-1=44$。

解析2. $\sqrt{n-1}+\sqrt{n}<2\sqrt{n}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$。故有
$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2025}}>\left(\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2025}}=88\frac{1}{45}$。
$\frac{1}{\sqrt{1}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}}+\frac{1}{\sqrt{2025}}\right)<1+\left(\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}\right)=89$。
兩式合併得 $88\frac{1}{45}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}}+\frac{1}{\sqrt{2025}}<89$，故所求 $=88$。

高二. 1. 已知一圓柱，其高和底圓之直徑的和爲 9，試求其體積的最大可能。(5分)
提示：算幾不等式：若 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\geq 0$，則
$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，且等號僅當 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 時成立。

2. 設 θ 爲銳角，試求 $\sin^2\theta\cos\theta$ 的最大值。(5分)
提示：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

解析1. 設底圓之半徑爲 r，圓柱高爲 h，則 $2r+h=9$。
由算幾不等式有 $\frac{r+r+h}{3}\geq\sqrt[3]{r^2h}\Rightarrow\pi r^2h\leq 27\pi$。
等式成立之條件爲 $r=r=h=3$。故當 $r=h=3$ 時，該圓柱有最大體積 27π。

解析2. 考慮 $\frac{\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta+\cos^2\theta}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sin^4\theta\cos^2\theta}\Rightarrow\sin^2\theta\cos\theta\leq\sqrt{(\frac{1}{3})^3\cdot 4}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$。
等式成立之條件爲 $\frac{1}{2}\sin^2\theta=\cos\theta$，可解得當 $\cos\theta=\sqrt{2}-1$, $\sin\theta=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ 時 (有銳角 θ 滿足此)，$\sin^2\theta\cos\theta$ 有最大值 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$,