

國立板橋高級中學 101 學年度第 2 學期數學科雙週解題
《第四回》解析

高一. 高斯函數 $[x]$, 為不大於 x 的最大整數, 如: $[1.5] = 1$, $[1] = 1$, $[-0.6] = -1$, 則 $\sum_{k=1}^{418} \left[\sqrt[4]{\frac{418}{k}} \right]$ 之值為何?

解析. $2^4 = 16$, $3^4 = 81$, $4^4 = 256$, $5^4 = 1024$,

$\left[\frac{418}{16} \right] = 26$, $\left[\frac{418}{81} \right] = 5$, $\left[\frac{418}{256} \right] = 1$. 故諸項之中有 1 個 4, $(5-1)$ 個 3, $(26-5)$ 個 2, 及 $(418-26)$ 個 1, 所求 $= 4 \cdot 1 + 3 \cdot (5-1) + 2 \cdot (26-5) + 1 \cdot (418-26) = 450$.

高二. 平面上有三個圓, 半徑分別為 1, 2, 3, 且兩兩外切. 若有另一圓與三圓皆外切, 則此圓半徑為何?

解析. 三圓心, 兩兩之距離分別為 3, 4, 5. 坐標化令其為 $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(0,4)$, 三圓之方程式為 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + y^2 = 2^2$, $x^2 + (y-4)^2 = 3^2$.

設另一圓之圓心為 (a,b) 半徑為 r , 由與三圓相切可得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = (r+1)^2 \\ (a-3)^2 + b^2 & = (r+2)^2 \\ a^2 + (b-4)^2 & = (r+3)^2 \end{cases}$$

可解得 $(a,b,r) = \left(\frac{21}{23}, \frac{20}{23}, \frac{6}{23}\right)$ 或 $(3,4,-6)$ (不合). 故半徑為 $\frac{6}{23}$.