

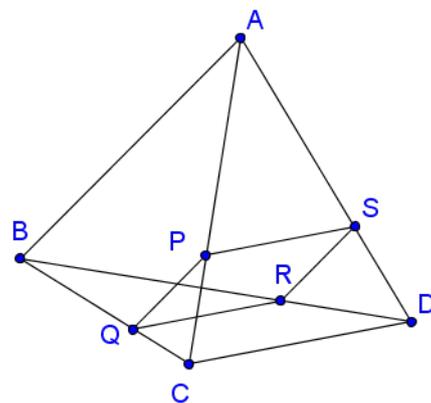
國立板橋高級中學 101 學年度第 2 學期數學科雙週解題  
《 第三回 》解析

高一. 一票箱(匿名投票)中有 8 張投給甲的票, 有 4 張投給乙的票。試問有多少種開票的過程, 滿足甲的票數一直領先乙的票數。

解析. 將開票過程中, 甲、乙之票數以坐標記之, 如甲 5 票, 乙 3 票, 則記為  $(5, 3)$ 。在坐標坐平面上, 依開票過程順序將這些點連線 ( $(0, 0)$  亦為其中一點), 則每種開票過程, 將對應至一條從  $(0, 0)$  到  $(8, 4)$  的折線 (由水平和鉛直組成)。甲一直領先對應折線為該折線與  $x = y$  僅交於  $(0, 0)$  一點。至  $(8, 4)$ , 必恰經過  $(8, 3)$ 、 $(7, 4)$  其中之一。以此遞推計算可得

				14	42	90	165
			5	14	28	48	75
		2	5	9	14	20	27
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1

高二. 如圖, 正四體  $A-BCD$  的邊長為  $3\sqrt{6}$ ,  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  分別為  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{BD}$  及  $\overline{AD}$  上, 且滿足  $\frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BR}{RD} = \frac{AS}{SD} = 2$ 。試求  $CDPQRS$  的體積。(提示:  $PQRS$  共平且為矩形。)



解析. 由  $P$ 、 $Q$ 、 $S$ 、 $R$  對  $\overline{CD}$  做投影點, 可得  $P$ 、 $Q$  投影至  $U$ ,  $R$ 、 $S$  投影至  $V$  ( $\because \angle RDC = \angle SDC = 60^\circ$  且  $\overline{RD} = \overline{SD} \therefore R, S$  投影點相同,  $U$  亦同理由)。由  $\angle PUC = \angle QUC = 90^\circ$  可得  $\overline{CD}$  垂直平面  $PQU$ , 同理  $\overline{CD}$  垂直平面  $RSV$ 。

將  $CDPQRS$  以平面  $PQU$  和  $RSV$  切成三部分: 兩三角錐和一三角柱。其底面積皆為  $\triangle PQU = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。故總體積為  $\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot (3\sqrt{6} - \sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6}) = 7\sqrt{3}$ 。