

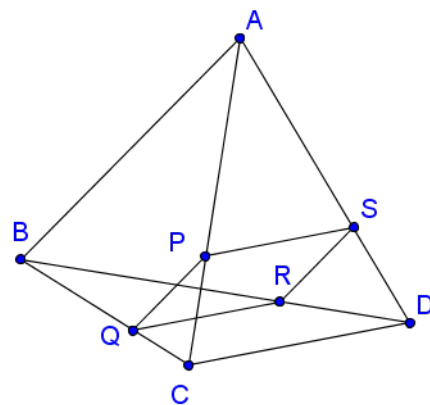
國立板橋高級中學 101 學年度第 2 學期數學科雙週解題
《 第三回 》解析

高一. 一票箱(匿名投票)中有 8 張投給甲的票, 有 4 張投給乙的票。試問有多少種開票的過程, 滿足甲的票數一直領先乙的票數。

解析. 將開票過程中, 甲、乙之票數以坐標記之, 如甲 5 票, 乙 3 票, 則記為 $(5, 3)$ 。在坐標坐平面上, 依開票過程順序將這些點連線 ($(0, 0)$ 亦為其中一點), 則每種開票過程, 將對應至一條從 $(0, 0)$ 到 $(8, 4)$ 的折線 (由水平和鉛直組成)。甲一直領先對應折線為該折線與 $x = y$ 僅交於 $(0, 0)$ 一點。至 $(8, 4)$, 必恰經過 $(8, 3)$ 、 $(7, 4)$ 其中之一。以此遞推計算可得

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|-----|
| | | | | 14 | 42 | 90 | 165 |
| | | | 5 | 14 | 28 | 48 | 75 |
| | | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

高二. 如圖, 正四體 $A-BCD$ 的邊長為 $3\sqrt{6}$, P 、 Q 、 R 、 S 分別為 \overline{AC} 、 \overline{BC} 、 \overline{BD} 及 \overline{AD} 上, 且滿足 $\frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BR}{RD} = \frac{AS}{SD} = 2$ 。試求 $CDPQRS$ 的體積。(提示: $PQRS$ 共平且為矩形。)



解析. 由 P 、 Q 、 S 、 R 對 \overline{CD} 做投影點, 可得 P 、 Q 投影至 U , R 、 S 投影至 V ($\because \angle RDC = \angle SDC = 60^\circ$ 且 $\overline{RD} = \overline{SD} \therefore R, S$ 投影點相同, U 亦同理由)。由 $\angle PUC = \angle QUC = 90^\circ$ 可得 \overline{CD} 垂直平面 PQU , 同理 \overline{CD} 垂直平面 RSV 。

將 $CDPQRS$ 以平面 PQU 和 RSV 切成三部分: 兩三角錐和一三角柱。其底面積皆為 $\triangle PQU = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。故總體積為 $\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot (3\sqrt{6} - \sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6}) = 7\sqrt{3}$ 。