國立板橋高級中學 101 學年度第 2 學期數學科雙週解題
《第二回》解析

高一. 假設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1},\ n \geq 2$。

1. 若 $a_n = r^n,\ r \neq 0$，則 $r =$ ____。(兩解)
2. 若 p, q 爲 1. 之兩解，試證：$b_n = xp^n + yq^n$，亦滿足 $b_{n+1} = 2b_n + b_{n-1},\ n \geq 2$。
3. 若 $a_1 = a_2 = 1$，則 a_n 的一般式爲何? (即以 n 表示 a_n $(n \in \mathbb{N})$)。

解析.

1. $r^{n+1} = 2r^n + r^{n-1} \Rightarrow r^2 - 2r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$。
2. 由 p, q 爲 1. 之兩解知 $p^{n+1} = 2p^n + p^{n-1}$和 $q^{n+1} = 2q^n + q^{n-1}$。
   因此 $b_{n+1} = xp^{n+1} + yq^{n+1} = x(2p^n + p^{n-1}) + y(2q^n + q^{n-1}) = 2(xp^n + yq^n) + (xp^{n-1} + yq^{n-1}) = 2b_n + b_{n-1}$。
3. 取適當的 x, y 使得 $b_1 = b_2 = 1$，即 x, y 滿足方程式 $\begin{cases} xp^2 + yq^2 & = 1 \\ xp + yq & = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-q}{p(p-q)},\ y = \frac{1-p}{q(q-p)}$。
   取 $(p, q) = (1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$，得 $x = \frac{1}{2+2\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{2-2\sqrt{2}}$，得 $b_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^{n-1}}{2}$，且 $b_1 = b_2 = 1$ 和 $b_{n+1} = 2b_n + b_{n-1}$。故 $a_n = b_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^{n-1}}{2}$。

高二. 定義 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 - c_1b_2a_3$。設 x, y, z 爲方程 $t^3 - 2013t + 3t - 21 = 0$ 之三根，試求 $\begin{vmatrix} -2x & x+y & x+z \\ y+x & -2y & y+z \\ z+x & z+y & -2z \end{vmatrix}$。

解析.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2x & x+y & x+z \\ y+x & -2y & y+z \\ z+x & z+y & -2z \end{vmatrix} &= -8xyz + 2(x+y)(y+z)(z+x) + 2y(x+z)^2 + 2x(y+z)^2 + 2z(x+y)^2 \\ &= 4x^2y + 4x^2z + 4xy^2 + 4xz^2 + 4y^2z + 4yz^2 + 8xyz \end{aligned}$$

注意 $(xy + yz + zx)(x + y + z) = x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$。
故所求可化簡爲 $4\left((xy + yz + zx)(x + y + z) - xyz\right)$。
由根與關係知上式 $= 4 \cdot (3 \cdot 2013 - 21) = 24072$。