國立板橋高級中學101學年度第一學期數學科雙週解題《第八回》參考解答

高一：設 $a,\ b,\ c$ 都是正實數，若 $11,\ 21,\ 31$ 是方程式 $a^{\frac{1}{x}}\cdot b^{\frac{1}{x+3}}\cdot c^{\frac{1}{x+6}}=10$ 的三個根，則 $\log(abc)=$ ？

解 $a^{\frac{1}{x}}\cdot b^{\frac{1}{x+3}}\cdot c^{\frac{1}{x+6}}=10\Rightarrow\dfrac{1}{x}\log a+\dfrac{1}{x+3}\log b+\dfrac{1}{x+6}\log c=1$

$\Rightarrow(x+3)(x+6)\log a+x(x+6)\log b+x(x+3)\log c=x(x+3)(x+6)$

$\Rightarrow x^3+(9-\log a-\log b-\log c)x^2-(9\log a+6\log b+3\log c-18)x+18\log a=0$

由根與係數關係知：$11+21+31=-9+\log a+\log b+\log c\Rightarrow\log abc=72$

高二：設 $P_1,P_2,\cdots,P_{100}$ 依序為單位圓上的100個等分點，試求 $\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_1P_3}^2+\cdots+\overline{P_1P_{100}}^2=$ ？

解 設單位圓的圓心為 O，$|\overrightarrow{P_1P_k}|^2=|\overrightarrow{OP_k}-\overrightarrow{OP_1}|^2=|\overrightarrow{OP_k}|^2-2\overrightarrow{OP_k}\cdot\overrightarrow{OP_1}+|\overrightarrow{OP_1}|^2$

故 $\sum_{k=2}^{100}|\overrightarrow{P_1P_k}|^2=\sum_{k=2}^{100}|\overrightarrow{OP_k}|^2-2\sum_{k=2}^{100}\overrightarrow{OP_k}\cdot\overrightarrow{OP_1}+\sum_{k=2}^{100}|\overrightarrow{OP_1}|^2=99-2\times(-1)+99=200$

$(\because\sum_{k=1}^{100}\overrightarrow{OP_k}=0\ \therefore\sum_{k=2}^{100}\overrightarrow{OP_k}=-\overrightarrow{OP_1}\Rightarrow\sum_{k=2}^{100}\overrightarrow{OP_k}\cdot\overrightarrow{OP_1}=-\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_1}=-1)$