國立板橋高級中學101學年度第一學期數學科雙週解題《第七回》參考解答

高一：設 $x,\ y\in\mathbb{C}$ 且 $x^2+xy+y^2=0$，令 $A=\dfrac{x}{x+y},\quad B=\dfrac{y}{x+y}$，試求 $A^{2005}+B^{2005}$ 之值。

解 已知 $A+B=1$ 且 $AB=\dfrac{xy}{(x+y)^2}=\dfrac{xy}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{xy}{xy}=1$，則 $A,\ B$ 為方程式 $t^2-t+1=0$ 的兩根

$(t+1)(t^2-t+1)=0\Rightarrow t^3=-1$，因此 $A^3=-1,\ B^3=-1$，故 $A^{2005}+B^{2005}=A+B=1$

解 已知 $A+B=1$ 且 $AB=\dfrac{xy}{(x+y)^2}=\dfrac{xy}{x^2+2xy+y^2}=\dfrac{xy}{xy}=1$，則 $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=-1$

$$A^n+B^n=(A^{n-1}+B^{n-1})(A+B)-(A^{n-2}+B^{n-2})(AB)=(A^{n-1}+B^{n-1})-(A^{n-2}+B^{n-2})$$

令 $A^n+B^n=C_n$，則 $C_n=C_{n-1}-C_{n-2}$，且 $\langle C_n\rangle:1,\ -1,\ -2,\ -1, 1, 2, 1,\ -1,\ -2,\ -1, 1, 2,\ \cdots$

不難發現其循環規律為6個一循環，故 $A^{2005}+B^{2005}=\!=A+B=1$

高二：平面坐標上，$O(0,0),\ A(3,0),\ B(2,2),\ C(4,1),\ P(x,y)$，滿足 $|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=3$。

1. 求 $x,\ y$ 的關係式。

2. 求 $\triangle PAC$ 的最大面積。

解 1. 由題意知 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(3x,3y)-(3,0)-(2,2)-(4,1)=(3x-9,\ 3y-3)$

$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|^2=9\Rightarrow(3x-9)^2+(3y-3)^2=9=1\Rightarrow(x-3)^2+(y-1)^2=1$

2. 在 $\triangle PAC$ 中，設 $P(x,y)$ 至 $\overline{AC}$ 的距離為 h，則 $\triangle PAC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times h=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times h$

$\because P$ 在圓 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 上 $\therefore h$ 的最大值為圓心 $(3,1)$ 至直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 的距離加上半徑，即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$

故 $\triangle PAC$ 面積的最大值為 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

另解：$\overrightarrow{AP}=(x-3,y),\ \overrightarrow{AC}=(1,1)$，則 $\triangle PAC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x-3 & y\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|x-y-3|$

令 $x-y-3=k$ 代入 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 得 $(y+k)^2+(y-1)^2=1\Rightarrow 2y^2+2(k-1)y+k^2=0$

有實根，判別式 ≥ 0，即 $4(k-1)^2-8k^2\geq 0\Rightarrow -1-\sqrt{2}\leq k\leq -1+\sqrt{2}\Rightarrow 0\leq|k|\leq 1+\sqrt{2}$

故 $\triangle PAC$ 面積的最大值為 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$，