國立板橋高級中學 101 學年度第 1 學期數學科雙週解題
《第五回》解析

高一. 設 $f(x)=6x^2+6x-6$，求方程式 $f(f(x))=x$ 的所有解。

答. $-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-7\pm\sqrt{165}}{12}$。

解1. 展開 $f(f(x))$，再以有理檢驗可得以下:

$$f(f(x))-x=216x^4+432x^3-180x^2-397x+174=(2x+3)(3x-2)\left(36x^2+42x-29\right)$$

故其所有解爲 $x=-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-7\pm\sqrt{165}}{12}$。

解2. 令 $y=f(x)$，則 $\begin{cases} y &= 6x^2+6x-6 \\ x &= 6y^2+6y-6 \end{cases} \Rightarrow y-x=6(x^2-y^2)+6(x-y) \Rightarrow (x-y)(6x+6y+7)=0 \Rightarrow y=x$ 或 $y=-x-\frac{7}{6}$，分別代入 $y=6x^2+6x-6$ 可解得 $x=-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-7\pm\sqrt{165}}{12}$。

解3. 若 $f(a)=a$，則 $f(f(a))=a$，推測 $f(x)-x$ 應爲 $f(f(x))-x$ 之因式。將 $f(x)$ 看成變數 t, x 視爲以 t 爲變數之多項式係數，做$6t^2+6t-6$ 除以 $t-x$ 而得 $6t^2+6t-6-x=(t-x)\left[6t+(6+6x)\right]+6x^2+5x-6$，故得 $f(f(x))-x=(f(x)-x)\left[6f(x)+(6+6x)\right]+f(x)-x=(f(x)-x)\left[6f(x)+6x+7\right]$。

故 $f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$ 或 $6f(x)+6x+7=0$，可解得 $x=-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-7\pm\sqrt{165}}{12}$。

高二. 設 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 均爲整數且滿足：(a) $-1 \le x_i \le 2$, $i=1,2,3,\ldots,n$ (b) $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=20$ (c) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=212$。令 $S=x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_n^3$，$S$ 的最大值和最小值分別爲 M, m，求 (M,m)。

答. $(M,m)=(248,20)$。

解. 設 x_i 中 -1 有 a 個，1 有 b 個，2 有 c 個，則有 $\begin{cases} -a+b+2c &= 20 \\ a+b+4c &= 212 \end{cases}$，而 $S=-a+b+8c=20+6c$。由 $\begin{cases} -a+b+2c &= 20 \\ a+b+4c &= 212 \end{cases}$ 可得 $b=116-3c$, $a=96-c$，又 a, b, c 均爲非負整數，因此 $0\le c\le 38 \Rightarrow 20\le S\le 248$。

檢驗 $c=0$ 時，$(a,b,c)=(96,116,0)$, $m=20$, $c=38$ 時，$(a,b,c)=(58,2,38)$, $M=248$。因此 $(M,m)=(248,20)$。