# 國立板橋高級中學 101 學年度第 1 學期數學科雙週解題
## 《第三回》解析

**高一.** 坐標平面上，$x$ 坐標、$y$ 坐標皆爲整數的點，稱其爲格子點。試問是否存在頂點皆爲格子點之正五邊形，並證明你(妳)的結論 (已知正五邊形之對角線長與邊長之比值爲 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$)。

**答.** 不存在。

**證.** 歸謬地假設存在一正五邊形，其五個頂點皆爲格子點。令其坐標分別爲 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$, $(x_5, y_5)$，其中 $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$。則有 $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。由 $x_i$, $y_i$ 均爲整數得 $\frac{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 爲有理數，但與 $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 爲無理數互爲矛盾，故假設錯誤，即不存在這樣的正五邊形。

**高二.** 化簡 $\frac{\tan 20^\circ}{2\sec 20^\circ+1-4\cos 20^\circ}$，其中 $\sec 20^\circ = \frac{1}{\cos 20^\circ}$。

**解析.** 注意三倍角公式有 $3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$。

原式 $= \frac{\sin 20^\circ}{2+\cos 20^\circ-4\cos^2 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{2+\cos 20^\circ-4\cos^2 20^\circ} \cdot \frac{3-4\sin^2 20^\circ}{4\cos^2 20^\circ-1}$，其中 $\frac{3-4\sin^2 20^\circ}{4\cos^2 20^\circ-1} = \frac{3-(4-4\cos^2 20^\circ)}{4\cos^2 20^\circ-1} = 1$。

令 $t = \cos 20^\circ$，則可化簡爲 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{-16t^4+4t^3+12t^2-t-2}$，而 $t$ 滿足 $4t^3-3t = \frac{1}{2} \Rightarrow 8t^3-6t-1=0$。

以之除 $-16t^4+4t^3+12t^2-t-2$，得 $-16t^4+4t^3+12t^2-t-2 = (8t^3-6t-1)(-2t+\frac{1}{2})-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$，

故得 $\frac{\tan 20^\circ}{2\sec 20^\circ+1-4\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\frac{-2}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$。