國立板橋高級中學 101 學年度第 1 學期數學科雙週解題
《第二回》解析

高一. 平面有上有 221 條直線，已知任三線不共點，每一條線上的交點數皆相同。試求總交點數的所有可能。

解析. 由三線不共點，可知任一條線上之交點個數和與其不平行之直線個數相同。因此對任一條直線來說，與其不平行之直線個數皆相同，故與其平行之直線個數亦相同。

由平行關係，可將直線分組，每組爲互相平行之直線所組成，各組之直線數量相等。因此分組之數和每組直線之數的乘積爲 $221 = 13 \times 17 = 17 \times 13 = 1 \times 221 = 221 \times 1$，共有四種可能：(1) 13 組，每組 17 條 (2) 17 組，每組 13 條 (3) 全平行 (4) 任兩條線不平行。

分別計算可得 (1) $\frac{221\times(221-17)}{2} = 22542$ (2) $\frac{221\times(221-13)}{2} = 22984$ (3) 0 (4) $\frac{221\times 220}{2} = 24310$。

高二. 設 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 爲直角，點 D 在斜邊 $\overline{AB}$ 上。已知 $\overline{AC} = 9$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{CD} = 6$ 且 $\triangle ACD$ 之內切圓與 $\triangle BCD$ 之內切圓有相同的半徑，試求 $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 面積之比值。

解析. 設 $\overline{AD} = x$, $\overline{BD} = y$，兩內切圓半徑爲 r，則可得 $\triangle ACD$ 之面積爲 $\frac{r}{2}(9+6+x)$, $\triangle BCD$ 之面積爲 $\frac{r}{2}(8+6+y)$。而此兩三角形，由 C 點做高，有相同之高，故其面積比爲底邊之比。因此有 $\frac{15+x}{14+y} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{15}{14}$。