國立板橋高級中學 101 學年度第 1 學期數學科雙週解題
《第一回》解析

高一. (1) 試求 $\sqrt{1156}=$? (2) 設 n 爲正整數，猜測 $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6}$，並證明之。

解析. 不難計算得 $\sqrt{1156}=34$, $\sqrt{111556}=334$，進而猜測 $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6}=\underbrace{33\ldots33}_{n-1}4$。以下有四種證明方法:

證1. $\underbrace{33\ldots33}_{n-1}4=\frac{10^n+2}{3}$, $(\underbrace{33\ldots33}_{n-1}4)^2=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2=\frac{10^{2n}+4\cdot10^n+4}{9}=\frac{10^{2n}-1+4\cdot(10^n-1)}{9}+1=\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6$。

證2. $\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6=\frac{10^{2n}-10^n}{9}+\frac{10^n-10}{9}\cdot5+6=\frac{10^{2n}+4\cdot10^n+4}{9}=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$。

證3. $x^2=(x-1)(x+1)+1\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\left(\underbrace{33\ldots33}_{n-1}4\right)^2&=\left(\underbrace{33\ldots333}_{n}\right)\left(\underbrace{33\ldots33}_{n-1}5\right)+1\\&=\left(\underbrace{11\ldots1}_{n}\right)\left(1\underbrace{00\ldots00}_{n-1}5\right)+1=\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6.\end{aligned}$$

證4. 以數學歸納法證明之，令 $a_n=\underbrace{33\ldots33}_{n-1}4$，欲證命題 $a_n^2=\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6$。

$n=1$ 時，$a_1=4$, $4^2=16$，命題 $n=1$ 時成立。

設 $n=k$, $(k\in\mathbb{N})$ 時命題亦成立，即 $a_k^2=\underbrace{11\ldots11}_{k}\underbrace{55\ldots5}_{k-1}6$。

當 $n=k+1$ 時，$a_{k+1}=10a_k-6$，$a_{k+1}^2=100a_k^2-120a_k+36$。

由歸納假設，再計算可得 $a_{k+1}^2=\underbrace{11\ldots11}_{k+1}\underbrace{55\ldots5}_{k}6$。故由數學歸納法得證。

高二. 今有一階梯共有 15 階，小明自底部以每次 1 階或 2 階方式向上，但不踩第 5 階及第 9 階，問共有幾種方式爬到頂端?

解析. 可遞迴求解之，假設 a_n 爲 n 階不踩 5, 9 之方法數。則 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，當 $n\neq5,9$ 且 $n\geq3$，其中 $a_5=a_9=0$。以下表記錄 a_n 之值，故有 80 種方法。

1	2	3	5	0	5	5	10	0	10	10	20	30	50	80

推廣. 可改爲任意階樓梯，有任意階不能踩，即有 s_n 階樓梯，但第 s_k, $k=1,2,3,\ldots,n-1$ 爲不能踩之階數，其中 $s_k\in\mathbb{N}$ 且 $s_{k+1}-s_k>1$, 。則其方法數爲 $F_{s_1}\cdot\left(\prod_{k=2}^{n-1}F_{s_k-s_{k-1}-1}\right)\cdot F_{s_n-s_{n-1}}$，其中 F_n 爲斐波那契數列，滿足 $F_1=F_2=1$, $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$，$\prod_{k=2}^{n-1}p_i=p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdots p_{n-1}$。