國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第九回》參考解答

高一：設某班有 44 位學生，其數學成績的算術平均數為 65 分，標準差為 4 分，試問成績大於 57 分且小於 73 分的學生至少有多少人？

〖解〗設成績大於 57 分且小於 73 分的學生有 n 位，其成績分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其餘成績為 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{44}$

則 $\begin{cases} |x_{n+1}-65| \ge 8 \\ |x_{n+2}-65| \ge 8 \\ \quad \vdots \\ |x_{44}-65| \ge 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_{n+1}-65)^2 \ge 8^2 \\ (x_{n+2}-65)^2 \ge 8^2 \\ \quad \vdots \\ (x_{44}-65)^2 \ge 8^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x_{n+1}-65)^2+(x_{n+2}-65)^2+\cdots+(x_{44}-65)^2 \ge (44-n)\cdot 8^2$

又 $4^2 = \dfrac{1}{44}\sum_{i=1}^{44}(x_i-65)^2 \ge \dfrac{1}{44}[(x_{n+1}-65)^2+(x_{n+2}-65)^2+\cdots+(x_{44}-65)^2]$

$\therefore 4^2 \ge \dfrac{1}{44}\cdot(44-n)\cdot 8^2 \Rightarrow n \ge 33$

高二：設 A, B 為橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的兩點，若 A, B 對稱於 y 軸，且 $C(0,1)$，試求 ΔABC 面積的最大值？

〖解〗令 $A(2\cos\theta, \sin\theta)$， $B(-2\cos\theta, \sin\theta)$，則 $\overrightarrow{CA}=(2\cos\theta, \sin\theta-1)$， $\overrightarrow{CB}=(-2\cos\theta, \sin\theta-1)$

$\Delta ABC = |2\cos\theta-\sin 2\theta| = 2|\cos\theta|\times|1-\sin\theta| = 2\sqrt{1-\sin^2\theta}\sqrt{(1-\sin\theta)^2} = 2\sqrt{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)^3}$

由算幾不等式知：$\dfrac{1+\sin\theta+\dfrac{1-\sin\theta}{3}+\dfrac{1-\sin\theta}{3}+\dfrac{1-\sin\theta}{3}}{4} \ge \sqrt[4]{(1+\sin\theta)\dfrac{(1-\sin\theta)^3}{27}}$

$\Rightarrow \sqrt{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)^3} \le \dfrac{\sqrt{27}}{4} \Rightarrow \Delta ABC \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (等號成立於 $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$)