國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第八回》參考解答

高一：設袋中有紅球 4 顆、白球 5 顆、黑球 6 顆，若每次由袋中任取一球，且取後不放回，則紅球最先取完的機率為何？

〖解〗令 $P(ABC)$ 表 A 色球先取完，B 色球次取完，C 色球最後取完的機率

$$\text{所求}=P(\text{紅白黑})+P(\text{紅黑白})=P(\text{黑球最後取完})\times P(\text{紅白})+P(\text{白球最後取完})\times P(\text{紅黑})$$

$$=\frac{\text{黑}}{\text{黑}+\text{非黑}}\times\frac{\text{白}}{\text{紅}+\text{白}}+\frac{\text{白}}{\text{白}+\text{非白}}\times\frac{\text{黑}}{\text{紅}+\text{黑}}=\frac{6}{6+9}\times\frac{5}{4+5}+\frac{5}{5+10}\times\frac{6}{4+6}=\frac{19}{45}$$

〖另解〗$P(\text{紅最先取完})=P(\text{紅比白先取完且紅比黑先取完})=1-P(\text{白比紅先取完或黑比紅先取完})$

$$=1-[P(\text{白比紅先取完})+P(\text{黑比紅先取完})-P(\text{白黑皆比紅先取完})]$$

$$=1-[\frac{4}{4+5}+\frac{4}{4+6}-\frac{4}{4+11}]=\frac{19}{45}$$

高二：設 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 滿足 $A^4+\frac{8}{3}A^3+A^2+\frac{8}{3}A+I=0$，且 $B=A+A^{-1}$ 滿足 $B^2+pB+qI=0$，試求 $p,\ q,\ \cos\theta$ 的值？

〖解〗$A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$，其中 $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases}\cos 4\theta+\frac{8}{3}\cos 3\theta+\cos 2\theta+\frac{8}{3}\cos\theta+1=0\\ \sin 4\theta+\frac{8}{3}\sin 3\theta+\sin 2\theta+\frac{8}{3}\sin\theta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(6\cos\theta-1)(2\cos\theta+3)(2\cos^2\theta-1)=0\\ 2\sin\theta\cos\theta(6\cos\theta-1)(2\cos\theta+3)=0\end{cases}\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow B=A+A^{-1}=\frac{1}{3}I\text{ 代入 }B^2+pB+qI=0\text{ 可得 }\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p+q=0\Rightarrow\begin{cases}p=\frac{8}{3}+3t\\ q=-1-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

〖另解〗$A^4+\frac{8}{3}A^3+A^2+\frac{8}{3}A+I=0\Rightarrow A^2+\frac{8}{3}A+I+\frac{8}{3}A^{-1}+A^{-2}=0\Rightarrow B^2+\frac{8}{3}B-I=0\Rightarrow p=\frac{8}{3},\quad q=-1$

$$B=A+A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos\theta & 0\\ 0 & 2\cos\theta\end{bmatrix}=2\cos\theta I$$

$$B^2+\frac{8}{3}B-I=0\Rightarrow 4\cos^2\theta+\frac{16}{3}\cos\theta-1=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{6}\text{ 或 }-\frac{3}{2}(\text{不合})$$