國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第七回》參考解答

高一：有21個相同球放入3個不同袋子，每袋至少一球，試求滿足任二袋球數和必大於第三袋球數的放法有幾種？

〚解〛設3個不同袋子中分別有 a,b,c 個球，若 $a \ge b \ge c$，則 $\begin{cases} a+b+c \le 3a \\ a+b+c > 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21 \le 3a \\ 21 > 2a \end{cases} \Rightarrow 7 \le a \le 10$

a	10	10	10	10	10	9	9	9	9	8	8	7
b	10	9	8	7	6	9	8	7	6	8	7	7
c	1	2	3	4	5	3	4	5	6	5	6	7
放法	3	6	6	6	6	3	6	6	3	3	6	1

經由上述討論可知共有 55 種放法

〚另解〛任意放扣掉有一袋超過 11 個，即 $H_{21}^3 - C_1^3 H_{10}^3 = 55$(種)

〚另解〛每袋最多 10 個，先每袋各放 10 個，則所求即為由此 3 袋取出 9 個的情形，共有 $H_9^3 = 55$ 種

高二：設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，若 $(I + \frac{1}{3}J)^{10} = aI + bJ$，其中 a,b 為實數，試求 $a+b=$？

〚解〛$J^2 = 3J$, $J^3 = 3^2 J$, $\cdots$, $J^n = {}^{n-1} J$

$$(I + \frac{1}{3}J)^{10} = C_0^{10} I^{10} + C_1^{10} I^9 (\frac{1}{3}J) + C_2^{10} I^8 (\frac{1}{3}J)^2 + C_3^{10} I^7 (\frac{1}{3}J)^3 + \cdots + C_{10}^{10} (\frac{1}{3}J)^{10}$$

$$= C_0^{10} I + C_1^{10} (\frac{1}{3}) J + C_2^{10} (\frac{1}{3}) J + C_3^{10} (\frac{1}{3}) J + \cdots + C_{10}^{10} (\frac{1}{3}) J$$

$$= I + (\frac{1}{3}) J (C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + \cdots + C_{10}^{10})$$

$$= I + (\frac{1}{3}) J (2^{10} - 1) = I + 341J$$

$\therefore a+b = 342$