國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第六回》參考解答

高一：試求$C_0^{32}+C_4^{32}+C_8^{32}+C_{12}^{32}+C_{16}^{32}+C_{20}^{32}+C_{24}^{32}+C_{28}^{32}+C_{32}^{32}$除以10的餘數？

⟦**解**⟧$\because C_0^{32}+C_1^{32}x+C_2^{32}x^2+C_3^{32}x^3+C_4^{32}x^4+C_5^{32}x^5+\cdots+C_{32}^{32}x^{32}=(1+x)^{32}$

將$x=1$代入得$C_0^{32}+C_1^{32}+C_2^{32}+C_3^{32}+C_4^{32}+C_5^{32}+\cdots+C_{32}^{32}=2^{32}$

將$x=-1$代入得$C_0^{32}-C_1^{32}+C_2^{32}-C_3^{32}+C_4^{32}-C_5^{32}+\cdots+C_{32}^{32}=0$

將$x=i$代入得$C_0^{32}+C_1^{32}i-C_2^{32}-C_3^{32}i+C_4^{32}+C_5^{32}i+\cdots+C_{32}^{32}=(1+i)^{32}=(2i)^{16}=2^{16}$

將$x=-i$代入得$C_0^{32}-C_1^{32}i-C_2^{32}+C_3^{32}i+C_4^{32}-C_5^{32}i+\cdots+C_{32}^{32}=(1-i)^{32}=(-2i)^{16}=2^{16}$

上列四個等式相加得：$4[C_0^{32}+C_4^{32}+C_8^{32}+C_{12}^{32}+C_{16}^{32}+C_{20}^{32}+C_{24}^{32}+C_{28}^{32}+C_{32}^{32}]=2^{32}+2\cdot 2^{16}$

$\therefore C_0^{32}+C_4^{32}+C_8^{32}+C_{12}^{32}+C_{16}^{32}+C_{20}^{32}+C_{24}^{32}+C_{28}^{32}+C_{32}^{32}=2^{30}+2^{15}$除以 10 的餘數為2

高二：設$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其中$a,b,c,d\in\{0,1,2,3,6\}$，則滿足$\det(A)=ad-bc=0$的二階方陣$A$有幾個？

⟦**解**⟧(1)a,b,c,d 中恰有 4 個0，例：$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，共有 1 個

(2)a,b,c,d 中恰有 3 個0，例：$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，共有$4\times 4=16$個

(3)a,b,c,d 中恰有 2 個0，例：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，共有$4\times 4\times 4=64$個

(4)a,b,c,d 中沒有0：

(A)四同：$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$，共有4個

(B)二同二同：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$，共有$6\times 4=24$個

(C)二同二異：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$，共有$2\times 2\times 2=8$個

故合計有$1+16+64+4+24+8=117$個二階方陣滿足題意