國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第五回》參考解答

高一：若多項式 $(1+x+x^2)^8$ 的展開式為 $1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{15}x^{15}+x^{16}$，試求 $a_5=$？

〚解〛設 8 個括號中，每個括號可提供 x 的次數為 n_i 次，其中 $n_i\in\{\,0,\ 1,\ 2\,\}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

依題意可知 $n_1+n_2+\cdots+n_8=5$，所以共有 $H_5^8=C_5^{12}$ 種方法扣掉某一個先配 3 (超過 2) 的方法

即 $H_5^8-C_1^8H_{5-3}^8=C_5^{12}-C_1^8C_2^9=504$

〚另〛$(1+x+x^2)^8=\displaystyle\sum_{a+b+c=8}\frac{8!}{a!b!c!}1^a x^b x^{2c}$

$\begin{cases}a+b+c=8\\ b+2c=5\end{cases}\Rightarrow$

c	2	1	0
b	1	3	5
a	5	4	3

$\therefore a_5=\dfrac{8!}{2!1!5!}+\dfrac{8!}{1!3!4!}+\dfrac{8!}{0!5!3!}=168+280+56=504$

高二：試求兩直線 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$ 與 $M:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{6}$ 所夾銳角的角平分線方程式？

〚解〛$\because (1,2,2)\cdot(2,3,6)>0$ $\therefore$ 向量 $(1,2,2)$ 與向量 $(2,3,6)$ 所夾的角度為銳角

分別將 $(1,2,2)$ 與 $(2,3,6)$ 單位化為 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 與 $(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7})$

顯然此兩向量的和 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})+(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7})=(\frac{13}{21},\frac{23}{21},\frac{32}{21})$ 必平分兩向量所夾的角

故兩直線所夾銳角的角平分線方程式為 $\dfrac{x}{13}=\dfrac{y}{23}=\dfrac{z}{32}$