國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第四回》參考解答

高一：設 $p(n)$ 表示自然數 n 的每個位數上非零數字之乘積，例： $p(203)=2\times 3=6$ 。

試求 $\sum_{k=1}^{999} p(k)=$？

⟦解⟧依題意可將 0 視為 1^* ，則所求為 $(1^*+1+2+\cdots+9)^3-1^*\times 1^*\times 1^*=46^3-1=97335$

⟦另解⟧依下列情形討論：

(1)一位數：總和為 $1+2+\cdots+9=45$

(2)二位數：(a)含 1 個零－總和為 $1+2+\cdots+9=45$

(b)含 0 個零－總和為 $(1+2+\cdots+9)\times(1+2+\cdots+9)=45\times 45$

(3)三位數：(a)含 2 個零－總和為 $1+2+\cdots+9=45$

(b)含 1 個零－總和為 $(1+2+\cdots+9)\times(1+2+\cdots+9)\times 2=45\times 45\times 2$

(c)含 0 個零－總和為 $(1+2+\cdots+9)\times(1+2+\cdots+9)\times(1+2+\cdots+9)=45\times 45\times 45$

故所求為 $45+45+45^2+45+45^2\times 2+45^3=97335$

高二：設方程式 $x^3-3x^2+ax-b=0$ 有三正根，試求 a 與 b 的最大值分別為何？

⟦解⟧設三正根為 α, β, γ ，則 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a\\ \alpha\beta\gamma=b\end{cases}$

由算幾不等式知：$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\Leftrightarrow 1\geq b$(等號成立於 $\alpha=\beta=\gamma=1$)

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9-2a$

由柯西不等式知：$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2\Leftrightarrow a\leq 3$(等號成立於 $\alpha=\beta=\gamma=1$)