國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第三回》參考解答

高一：試求$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$的整數部份？

【解】(1)$\because \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$，即$\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$$\therefore 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{999999}}>2[(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{1000000}-\sqrt{999999})]=2(1000-1)$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{999999}}+\frac{1}{\sqrt{1000000}}>2(1000-1)+\frac{1}{1000}=1998.001$$

(2)$\because \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$，即$\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<2[(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{1000000}-\sqrt{999999})]=2(1000-1)$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<2(1000-1)+1=1999$$

故$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}$的整數部份為$1998$

高二：設x,y為正實數，且$x+y=1$，試求$\frac{1}{x^2}+\frac{8}{y^2}$的最小值？

【解】法一：

由算幾不等式知：$\frac{1}{x^2}+27x+27x\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}\cdot 27x\cdot 27x}=27$，$\frac{8}{y^2}+27y+27y\ge 3\sqrt[3]{\frac{8}{y^2}\cdot 27y\cdot 27y}=54$

兩式相加可得：$\frac{1}{x^2}+\frac{8}{y^2}+54(x+y)\ge 27+54\Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{8}{y^2}\ge 27$

等號成立於$\frac{1}{x^2}=27x,\ \frac{8}{y^2}=27y$，即$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3}$

法二：

由廣義柯西不等式知：

$$\left[(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})^3+(\frac{2}{\sqrt[3]{y^2}})^3\right]\left[(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3\right]\left[(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3\right]\ge\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{y^2}}\cdot\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{y}\right]^3$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{x^2}+\frac{8}{y^2})(x+y)(x+y)\ge(1+2)^3\Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{8}{y^2}\ge 27$$

等號成立於$\frac{1}{x^2}:x=\frac{8}{y^2}:y\Rightarrow y^3=8x^3\Rightarrow y=2x$，又$x+y=1$，故$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3}$