國立板橋高級中學 100 學年度第二學期數學科菩提盃雙週解題《第二回》參考解答

高一：已知 $a=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$ ， $b=\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+\cdots+\frac{1}{100\times51}$ ，求 $\frac{a}{b}=$ ？

〖解〗$a=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{100})$

$$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}=(\frac{1}{51}+\frac{1}{100})+(\frac{1}{52}+\frac{1}{99})+(\frac{1}{53}+\frac{1}{98})+\cdots+(\frac{1}{75}+\frac{1}{76})$$

$$=151(\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+\cdots+\frac{1}{75\times76})$$

$$b=\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+\cdots+\frac{1}{100\times51}=2(\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+\cdots+\frac{1}{75\times76})$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{151}{2}$$

高二：將長方形 $ABCD$ 沿著對角線摺起，使平面 ABC 與平面 ADC 互相垂直，已知 $\overline{AB}=a$ ，$\overline{AD}=b$ ，試以 a,b 表示 $\overline{BD}$ 之長。

〖解〗設 B 在 $\overline{AC}$ 上的投影點為 E，$\overline{BE}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\overline{AE}=\sqrt{a^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

在 ΔADE 中，$\overline{DE}^2=b^2+\frac{a^4}{a^2+b^2}-2b\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^4+a^4-a^2b^2}{a^2+b^2}$

$$\therefore\overline{BD}^2=\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^4+a^4-a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\Rightarrow\overline{BD}=\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$$