國立板橋高級中學 100 學年度數學科菩提盃雙週解題《第九回》參考解答

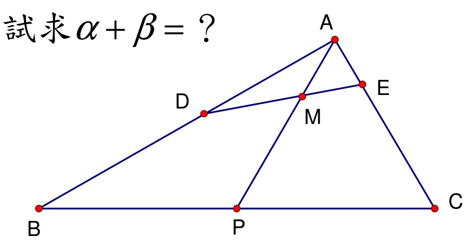
高一：設 x 為11位數的自然數，且 x 的首位數字與第二位數字分別為1與3，已知 $\sqrt[13]{x}$ 亦為自然數，試求 $x=$？

〖解〗設 $\sqrt[13]{x}=n$，則 $x=n^{13}\Rightarrow 13\times10^9\le n^{13}<14\times10^9\Rightarrow \log13+9\le\log n^{13}<\log14+9$

$\Rightarrow 1.1139+9\le 13\log n<1.1461+9\Rightarrow 0.778\le\log n<0.781$

$\because n\in\mathbb{N}\quad \therefore n=6\qquad$ 故 $x=6^{13}=13060694016$

高二：設點 P 是 ΔABC 邊 $\overline{BC}$ 的中點，點 M 是 $\overline{AP}$ 上的一點滿足 $\overline{AM}:\overline{AP}=1:3$，直線 $\overleftrightarrow{DE}$ 經過 M 點且分別交線段 $\overline{AB},\overline{AC}$ 於 D、E 兩點。已知 ΔABC 的面積是 36，令 $\alpha=\dfrac{\text{四邊形}BPMD\text{的面積}}{\Delta ADM\text{的面積}}$，$\beta=\dfrac{\text{四邊形}CPME\text{的面積}}{\Delta AEM\text{的面積}}$，試求 $\alpha+\beta=$？



〖解〗令 $\overline{AB}=x\overline{AD}$，$\overline{AC}=y\overline{AE}$

$$\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AP}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}\right)=\frac{1}{6}\overline{AB}+\frac{1}{6}\overline{AC}=\frac{x}{6}\overline{AD}+\frac{y}{6}\overline{AE}$$

$\because D,M,E$ 三點共線 $\quad\therefore \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{6}=1\ \Rightarrow\ x+y=6$

$$\alpha=\frac{\Delta ABP-\Delta ADM}{\Delta ADM}=\frac{\Delta ABP}{\Delta ADM}-1=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{AB}}{\overline{AM}\cdot\overline{AD}}-1=3x-1$$

$$\beta=\frac{\Delta ACP-\Delta AEM}{\Delta AEM}=\frac{\Delta ACP}{\Delta AEM}-1=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{AC}}{\overline{AM}\cdot\overline{AE}}-1=3y-1$$

故 $\alpha+\beta=(3x-1)+(3y-1)=3(x+y)-2=3\times6-2=16$