國立板橋高級中學100學年度數學科菩提盃雙週解題《第七回》參考解答

高一：已知$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2^2-1^2}+\dfrac{y^2}{2^2-3^2}+\dfrac{z^2}{2^2-5^2}=1\\ \dfrac{x^2}{4^2-1^2}+\dfrac{y^2}{4^2-3^2}+\dfrac{z^2}{4^2-5^2}=1\\ \dfrac{x^2}{6^2-1^2}+\dfrac{y^2}{6^2-3^2}+\dfrac{z^2}{6^2-5^2}=1\end{cases}$，試求$x^2+y^2+z^2$的值？

【解】原方程為$\dfrac{x^2}{t-1}+\dfrac{y^2}{t-9}+\dfrac{z^2}{t-25}=1$，其中$t=4, 16, 36$

上式可改為$(t-1)(t-9)(t-25)-x^2(t-9)(t-25)-y^2(t-1)(t-25)-z^2(t-1)(t-9)=0$

上式另一表示法為$(t-4)(t-16)(t-36)=0$

比較係數可知：$-4-16-36=-1-9-25-x^2-y^2-z^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=21$

高二：設$a\ge b\ge c\ge -2$，且$3a+2b-c=4$，試求$a+2b+c$之最大值？

【解】令$x=a-b,\ y=b-c,\ z=c+2$

$3a+2b-c=4 \Leftrightarrow 3(a-b)+5(b-c)+4(c+2)=12 \Leftrightarrow 3x+5y+4z=12$

要滿足的限制條件為$3x+5y+4z=12$，且$x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

滿足條件的區域為一個三角形，此三角形的各頂點為$(4,0,0),\ (0,\dfrac{12}{5},0),\ (0,0,3)$

目標函數為$a+2b+c=(a-b)+3(b-c)+4(c+2)-8=x+3y+4z-8$

將各頂點帶入，可知當$(x,y,z)=(0,0,3)$時，$x+3y+4z-8=4$為最大值

亦即，當$(a,b,c)=(1,1,1)$時，$a+2b+c=4$為最大值