國立板橋高級中學 100 學年度數學科菩提盃雙週解題《第五回》參考解答

高一：設k為正整數，若方程式$x^3+(k+41)x^2+(k+142)x+102=0$的根都是整數，

則k的值為何？

〚解〛顯然，-1為方程式的根，我們假設另兩根為α, β

$$x^3+(k+41)x^2+(k+142)x+102=(x+1)\left[x^2+(k+40)x+102\right]=(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

由根與係數關係知：$\alpha+\beta=-(k+40)$，$\alpha\beta=102=2\times3\times17$

因此$\alpha<0$，$\beta<0$，$\alpha+\beta\le-41$　$\therefore \alpha+\beta$可能為-103或-53

故$k=63$或13

高二：設$\langle a_n \rangle$為等差數列，若$4\le a_1+a_2\le 8, -4\le a_3+a_4-a_7\le 4$，則$a_6$的最大值為何？

〚解〛設首項為x，公差為y

則原題可改為已知$4\le 2x+y\le 8,\ -4\le x-y\le 4$，求$x+5y$的最大值

作圖可知解區域為一個四邊形，其頂點分別為$(0,4),\ (4,0),\ (\frac{8}{3},-\frac{4}{3}),\ (\frac{4}{3},\frac{16}{3})$

目標函數的最大值發生在$(x,y)=(\frac{4}{3},\frac{16}{3})$時，其值為$28$

〚解〛 $4\le 2x+y\le 8 \cdots (1)$　　$(1)\times 2-(2)\times 3$得：$-4\le x+5y\le 28$

$-4\le x-y\le 4 \cdots (2)$　　故a_6的最大值為28