國立板橋高級中學100學年度數學科菩提盃雙週解題《第四回》參考解答

高一：設 $f(x)$ 為6次多項式，且 $f(k)=\dfrac{1}{k}$，$k=1,2,\cdots,7$，試求 $f(8)$ 的值。

⟦**解**⟧令 $g(x)=xf(x)-1$，易知 $g(x)$ 為7次多項式，且 $g(x)=a(x-1)(x-2)\cdots(x-7)$，其中 a 為常數

由 $f(x)=\dfrac{a(x-1)(x-2)\cdots(x-7)+1}{x}$ 為6次多項式，可知 $a=\dfrac{1}{7!}$

故 $f(8)=\dfrac{\frac{1}{7!}\times 7\times 6\times\cdots\times 1+1}{8}=\dfrac{1}{4}$

⟦**解**⟧使用<u>牛頓插值法</u>或<u>拉格朗日插值法</u>亦可得到 $f(8)=\dfrac{1}{4}$

高二：設 ΔABC 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長分別為 a,b,c，且 $\tan\dfrac{A}{2}\times\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$，

試證：a,b,c 三數成等差。

⟦**解**⟧設 ΔABC 的內切圓半徑為 r，且 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，則 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{s-a}$, $\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{s-c}$

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs \iff s(s-a)(s-b)(s-c)=r^2s^2 \iff \dfrac{r}{s-a}\times\dfrac{r}{s-c}=\dfrac{s-b}{s}$

$\because \tan\dfrac{A}{2}\times\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}\quad \therefore \dfrac{s-b}{s}=\dfrac{1}{3} \iff 2s=3b \iff a+c=2b$，故 a,b,c 三數成等差

⟦**解**⟧$\dfrac{1}{9}=\dfrac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\times\dfrac{\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}=\dfrac{(1-\cos A)(1-\cos C)}{(1+\cos A)(1+\cos C)}=\dfrac{\left[2bc-(b^2+c^2-a^2)\right]\left[2ab-(a^2+b^2-c^2)\right]}{\left[2bc+(b^2+c^2-a^2)\right]\left[2ab+(a^2+b^2-c^2)\right]}$

$=\dfrac{\left[a-(b-c)\right]\left[a+(b-c)\right]\left[c-(a-b)\right]\left[c+(a-b)\right]}{\left[(b+c)-a\right]\left[(b+c)+a\right]\left[(a+b)-c\right]\left[(a+b)+c\right]}=\dfrac{\left[a-(b-c)\right]\left[c+(a-b)\right]}{\left[(b+c)+a\right]\left[(a+b)+c\right]}=\dfrac{(c+a-b)^2}{(a+b+c)^2}$

$\iff (a+b+c)^2=9(c+a-b)^2 \Rightarrow a+b+c=3(c+a-b)$ 或 $-3(c+a-b)$（不合）$\Rightarrow a+c=2b$

故 a,b,c 三數成等差