國立板橋高級中學 100 學年度數學科菩提盃雙週解題《第二回》參考解答

高一：設$[x]$為不超過x的最大整數，例如：$[1.99]=1$、$[2.1]=2$、$[-0.2]=-1$。

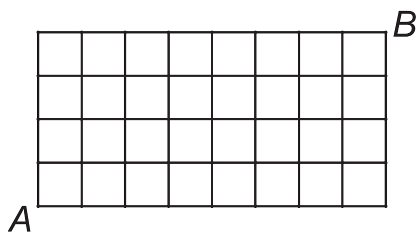
求$[30(\frac{1}{1\sqrt{4}+4\sqrt{1}}+\frac{1}{4\sqrt{7}+7\sqrt{4}}+\frac{1}{7\sqrt{10}+10\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{2008\sqrt{2011}+2011\sqrt{2008}})]$的值。

〚解〛$\frac{1}{a\sqrt{a+3}+(a+3)\sqrt{a}}=\frac{(a+3)\sqrt{a}-a\sqrt{a+3}}{(a+3)^2a-a^2(a+3)}=\frac{(a+3)\sqrt{a}-a\sqrt{a+3}}{3a(a+3)}$

$$=\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{a}}{a}-\frac{\sqrt{a+3}}{a+3})=\frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+3}})$$

所求為$[30\times\frac{1}{3}\times(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2005}}-\frac{1}{\sqrt{2008}}+\frac{1}{\sqrt{2008}}-\frac{1}{\sqrt{2011}})]$

$$=[10\times(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2011}})]=[10-\frac{10}{\sqrt{2011}}]=9$$



高二：右圖為4×8的棋盤，其中每一方格皆為正方形。試問從A點沿格線走最短路徑到B點，且路徑恰平分棋盤面積的走法有幾種？

〚解〛設R為從A點沿格線走到B點的最短路徑，

若沿路徑R前進向上時左手邊的方塊依序為x_1、x_2、x_3、x_4個，

則$0\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le 8$，且$x_1+x_2+x_3+x_4=16$

顯然，所求的走法數即為滿足上述條件的解的個數

(1) $x_4=8$時，$x_1+x_2+x_3=8$，有 10 組解

(2) $x_4=7$時，$x_1+x_2+x_3=9$，有 10 組解

(3) $x_4=6$時，$x_1+x_2+x_3=10$，有 8 組解

(4) $x_4=5$時，$x_1+x_2+x_3=11$，有 4 組解

(5) $x_4=4$時，$x_1+x_2+x_3=12$，有 1 組解

由上述討論可知：共有33種走法