

接力賽《第一回》

※考試時間：8 分鐘。

《第一回第一棒》

R1-1. 有多少個正整數 x 使 $\sqrt{108-x}\sqrt{x}$ 也是正整數？

解：顯然 x 為完全平方數且 $x \leq 16 \Rightarrow$ 可能 $x=1, 4, 9, 16$ ，檢查 $x=4, 9$ 時有正整數，共 2 個

《第一回第二棒》

R1-2. 設 T 為前一題傳過來的答案。不等式 $-1 \leq \log_2(\log_2 x) \leq T$ 共有幾個整數解？

解： $\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2(\log_2 x) \leq \log_2 2^T \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq 2^T \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} \leq x \leq 2^{2^T}$ ，代 $T=2$ 共有 $2^4 - 1 = 15$ 個整數

《第一回第三棒》

R1-3. 設 T 為前一題傳過來的答案。已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ ，則 $f(T)$ 之值為何？

解：令 $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ ，則 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 1$ ，

代 $T=15 \Rightarrow f(15) = 256$

接力賽《第二回》

※考試時間：8 分鐘。

《第二回第一棒》

R2-1. 有 6 個正整數，其算術平均數、中位數、全距及唯一的眾數均為 6，則此 6 數中最大可能的值為？

解：若 6 數中恰有 2 個 6，則可能 3, 5, 6, 6, 7, 9，最大 9

若 6 數中恰有 3 個 6，則可能 4, 4, 6, 6, 6, 10，最大 10

若 6 數中恰有 4 個 6，則可能 3, 6, 6, 6, 6, 9，最大 9

故最大可能為 10

《第二回第二棒》

R2-2. 設 T 為前一題傳過來的答案。若從連續整數 $1, 2, 3, \dots, T$ 中任取 3 個數，恰有 2 個連續整數的機率為何？

$$\text{解：} \frac{2 \cdot (T-3) + (T-3) \cdot (T-4)}{C_3^T}, \text{ 代 } T=10 \Rightarrow \frac{2 \cdot 7 + 7 \cdot 6}{C_3^{10}} = \frac{7}{15}$$

《第二回第三棒》

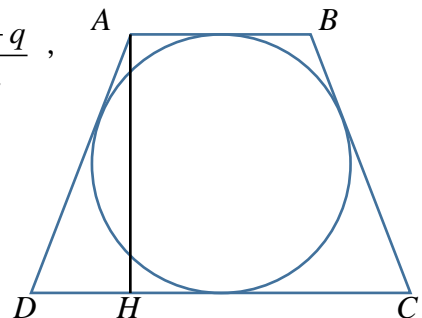
R2-3. 設 T 為前一題傳過來的答案。若有內切圓的等腰梯形 $ABCD$ 上底與下底的

比值 $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = T$ 且 \overline{AB} 長、 \overline{CD} 長互質，則等腰梯形 $ABCD$ 的高為何？

$$\text{解：} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{q}{p} \Rightarrow \overline{AB} = q, \overline{CD} = p, \text{ 又 } \overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) = \frac{p+q}{2},$$

$$\overline{DH} = \frac{1}{2}(\overline{CD} - \overline{AB}) = \frac{q-p}{2}, \overline{AH} = \frac{\sqrt{(p+q)^2 - (q-p)^2}}{2},$$

$$\text{代 } T = \frac{7}{15} = \frac{q}{p} \Rightarrow \overline{AH} = \sqrt{105}$$



接力賽《第三回》

※考試時間：8 分鐘。

《第三回第一棒》

R3-1. 已知 $2_{(10)} \times 2_{(10)} = 4_{(10)}$ 、 $4_{(10)} \times 4_{(10)} = 16_{(10)}$ 、 $16_{(8)} \times 16_{(8)} = 196_{(10)}$ 且 $14_{(8)} \times 14_{(8)} = N_{(8)}$ ，則 $N_{(8)}$

的各位數字和為？（ $N_{(8)}$ ：下標(8)代表將數字以 8 進位 表示）

解： $14_{(8)} \times 14_{(8)} = 12_{(10)} \times 12_{(10)} = 144_{(10)} = 220_{(8)}$ ，各位數字和為 4

《第三回第二棒》

R3-2. 設 T 為前一題傳過來的答案。已知 $\begin{cases} 3 \leq x + y \leq 8 \\ 1 \leq 2x - y \leq T \end{cases}$ ，則 $3x + y$ 的最大值為？

解： $3x + y = \frac{5}{3}(x + y) + \frac{2}{3}(2x - y) \leq \frac{5}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3} \cdot T$ ，代 $T = 4$ 有最大值 16

《第三回第三棒》

R3-3. 設 T 為前一題傳過來的答案。四階幻方是由 1~16 的正整數填入 4×4 的方格，使每行、列及兩對角線的總和均一致。下圖未完成的四階幻方中， S 的值為？

解：每行列總和為 $\frac{16 \cdot 17}{2} \times \frac{1}{4} = 34$ ，則如右圖，

$$(S - 3) + (T - 3) + T + S = 34 \Rightarrow S + T = 20, \text{ 代 } T = 16 \Rightarrow S = 4$$

$S - 3$	8	10	$19 - S$
12	$T - 3$	$19 - T$	6
7	$18 - T$	T	9
$18 - S$	11	5	S

接力賽參考解答：

R1-1. 2

R1-2. 15

R1-3. 256

R2-1. 10

R2-2. $7/15$

R2-3. $\sqrt{105}$

R3-1. 4

R3-2. 16

R3-3. 4

第一回
第 1 棒

R1-1. 有多少個正整數 x 使 $\sqrt{108-x}\sqrt{x}$ 也是正整數？

第一回
第 2 棒

R1-2. 設 T 為前一題傳過來的答案。不等式 $-1 \leq \log_2(\log_2 x) \leq T$ 共有幾個整數解？

第一回
第 3 棒

R1-3. 設 T 為前一題傳過來的答案。已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$ ，則 $f(T)$ 之值為何？

第一回 第 1 棒

第一回 第 2 棒

第一回 第 3 棒

第二回
第 1 棒

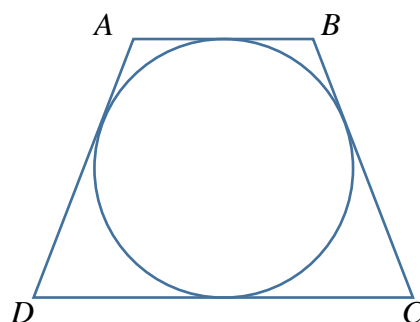
R2-1. 有 6 個正整數，其算術平均數、中位數、全距及唯一的眾數均為 6，則此 6 數中最大可能的值為？

第二回
第 2 棒

R2-2. 設 T 為前一題傳過來的答案。若從連續整數 $1, 2, 3, \dots, T$ 中任取 3 個數，恰有 2 個連續整數的機率為何？

第二回
第 3 棒

R2-3. 設 T 為前一題傳過來的答案。若有內切圓的等腰梯形 $ABCD$ 上底與下底的比值 $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = T$ 且 \overline{AB} 長、 \overline{CD} 長互質，則等腰梯形 $ABCD$ 的高為何？



第二回 第 1 棒

第二回 第 2 棒

第二回 第 3 棒

第三回
第 1 棒

R3-1. 已知 $2_{(10)} \times 2_{(10)} = 4_{(10)}$ 、 $4_{(10)} \times 4_{(10)} = 16_{(10)}$ 、 $16_{(8)} \times 16_{(8)} = 196_{(10)}$ 且 $14_{(8)} \times 14_{(8)} = N_{(8)}$ ，
則 $N_{(8)}$ 的各位數字和為？（ $N_{(8)}$ ：下標(8)代表將數字以 8 進位 表示）

第三回
第 2 棒

R3-2. 設 T 為前一題傳過來的答案。已知 $\begin{cases} 3 \leq x + y \leq 8 \\ 1 \leq 2x - y \leq T \end{cases}$ ，則 $3x + y$ 的最大值為？

第三回
第 3 棒

R3-3. 設 T 為前一題傳過來的答案。四階幻方是由 1~16 的正整數填入 4×4 的方格，
使每行、列及兩對角線的總和均一致。下圖未完成的四階幻方中， S 的值為？

	8	10	
12			6
7		T	9
	11	5	S

第三回 第1棒

第三回 第2棒

第三回 第3棒

接力賽《第 回》

編號：_____ 隊名：_____ 分數：_____

第 1 棒：_____ 第 2 棒：_____ 第 3 棒：_____

接力賽《第 回》

編號：_____ 隊名：_____ 分數：_____

第 1 棒：_____ 第 2 棒：_____ 第 3 棒：_____

接力賽《第 回》

編號：_____ 隊名：_____ 分數：_____

第 1 棒：_____ 第 2 棒：_____ 第 3 棒：_____