

新北市立板橋高級中學 107 學年度第 13 屆菩提盃數學競賽團體賽

※團體賽可以使用計算機，競賽時間 40 分鐘

1. 若 $f(x)$ 為領導係數 1 的四次實係數多項式，且滿足 $f(1)=6, f(2)=12, f(3)=18$ ，求 $f(6)+f(-2)$ 的值。
2. 在圓周上有 284 個位置，現依順時針方向每個位置填入一個整數，使得第 19 個位置的整數為 -2 ，第 61 個位置的整數為 10 及第 140 個位置的整數為 7，且任 20 個連續位置的整數之和恆為 30，則第 230 個位置的整數為何。
3. $y=||x|-2|$ 之圖形與 $y=k$ 之圖形恰有二個交點，求實數 k 的範圍。
4. 設一直角三角形的斜邊長與一股長的和為 8，求此直角三角形的面積產生最大值時的三角形各邊長。
5. 設 x 為實數， $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，若
$$\left[x+\frac{1}{200}\right]+\left[x+\frac{2}{200}\right]+\left[x+\frac{3}{200}\right]+\dots+\left[x+\frac{106}{200}\right]+\left[x+\frac{107}{200}\right]=2018,$$
求 $[100x]$ 的值。
6. 設 $\triangle ABC$ 的周長為 108， $\angle A=60^\circ$ ，且 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 $5\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的外接圓面積。
7. 數字和為 12 的五位數共有多少個。
8. 求方程式 $x^6+x^5+x^4-28x^3+x^2+x+1=0$ 的實根。
9. 求 $\sum_{k=1}^{119} |kx-1|$ 的最小值。
10. 已知 $2x+y+16=0$ ，求 $\log_2 \frac{y}{x^2}$ 的最大值。

新北市立板橋高級中學 107 學年度第 13 屆菩提盃數學競賽團體賽

答案卷

隊伍編號：_____ 隊名：_____

(每格 6 分,共計 60 分)

(1)	(2)
(3)	(4)
(5)	(6)
(7)	(8)
(9)	(10)

新北市立板橋高級中學 107 學年度第 13 屆菩提盃數學競賽團體賽

解答

(每格 6 分,共計 60 分)

(1) 504	(2) -9
(3) $k=0$ 或 $k>2$	(4) $\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3}$
(5) 1892	(6) 507π
(7) 1330	(8) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
(9) 49	(10) -4

新北市立板橋高級中學 107 學年度第 13 屆菩提盃數學競賽團體賽
 ※團體賽可以使用計算機，競賽時間 40 分鐘

1. 若 $f(x)$ 為領導係數 1 的四次實係數多項式，且滿足 $f(1)=6$ ， $f(2)=12$ ， $f(3)=18$ ，求 $f(6)+f(-2)$ 的值。

解析

$$\text{設 } f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-t)+6x$$

$$\therefore f(6)+f(-2)=60(6-t)+36-60(-2-t)-12=\boxed{504}$$

2. 在圓周上有 284 個位置，現依順時針方向每個位置填入一個整數，使得第 19 個位置的整數為 -2，第 61 個位置的整數為 10 及第 140 個位置的整數為 7，且任 20 個連續位置的整數之和恆為 30，則第 230 個位置的整數為何。

解析

$$a_1=a_{21}=a_{41}=\dots=a_{281}=a_{17}=a_{37}=\dots=a_{277}=a_{13}=a_{33}=\dots=a_{273}=a_9=a_{29}=\dots=a_{269}=a_5$$

$$=a_{25}=a_{45}=\dots=a_{265}=a_1 \quad \therefore \text{此數列為 4 個一循環}$$

$$a_{19}=a_3=-2; a_{61}=a_1=10; a_{140}=a_4=7; a_{230}=a_2$$

$$5(a_1+a_2+a_3+a_4)=5(10+a_2-2+7)=30$$

$$\therefore a_2=-9 \quad \text{故 } a_{230}=a_2=\boxed{-9}$$

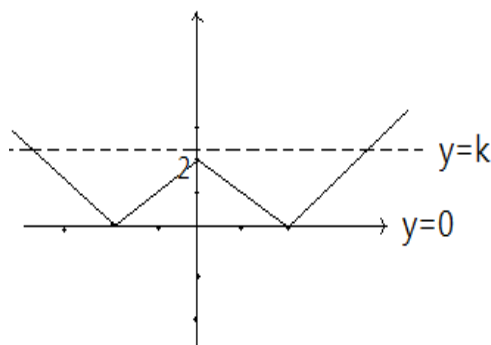
3. $y=||x|-2|$ 之圖形與 $y=k$ 之圖形恰有二個交點，求實數 k 的範圍。

解析

$$y=||x|-2| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = |x-2| \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 0 \\ y = |-x-2| \end{cases}$$

$y=k$ 是一條水平線

$$\therefore \boxed{k=0 \text{ 或 } k>2} \text{ 兩圖形恰有二個交點}$$



4. 設一直角三角形的斜邊長與一股長的和為 8，求此直角三角形的面積產生最大值時的三角形各邊長。

解析

$$\text{設直角三角形的斜邊長為 } x, \text{ 兩股的長分別為 } 8-x \text{ 與 } \sqrt{x^2-(8-x)^2}=4\sqrt{x-4}$$

$$\text{直角三角形的面積} = \frac{1}{2}(8-x) \cdot 4\sqrt{x-4} = 2(8-x) \cdot \sqrt{x-4}$$

$$\text{由算幾不等式 } \frac{(8-x)+(8-x)+(2x-8)}{3} \geq \sqrt[3]{(8-x)(8-x)(2x-8)} \Rightarrow \left(\frac{8}{3}\right)^3 \geq 2(8-x)^2(x-4)$$

$$\Rightarrow 2(8-x) \cdot \sqrt{x-4} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^3} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{當 } 8-x=2x-8 \text{ 即 } x=\frac{16}{3} \text{ 時，上式中的等號成立，此直角三角形的最大面積為 } \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{此時，三角形的三邊長分別為 } \boxed{\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3}}$$

5. 設 x 為實數， $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，若

$$\left[x + \frac{1}{200}\right] + \left[x + \frac{2}{200}\right] + \left[x + \frac{3}{200}\right] + \dots + \left[x + \frac{106}{200}\right] + \left[x + \frac{107}{200}\right] = 2018, \text{ 求 } [100x] \text{ 的值。}$$

解析

$$107 \times 18 < 2018 < 107 \times 19$$

$$\text{令 } \left[x + \frac{k}{200}\right] = 18, 1 \leq k \leq m, \text{ 且 } \left[x + \frac{k}{200}\right] = 19, m+1 \leq k \leq 107$$

$$m \times 18 + (107 - m) \times 19 = 2018 \Rightarrow m = 15$$

$$\left[x + \frac{15}{200}\right] = 18, \left[x + \frac{16}{200}\right] = 19 \Rightarrow 18.92 \leq x < 18.925 \Rightarrow 1892 \leq 100x < 1892.5 \therefore [100x] = \boxed{1892}$$

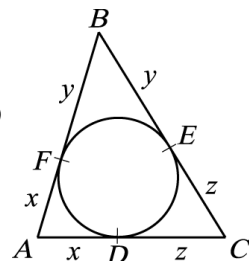
6. 設 $\triangle ABC$ 的周長為 108， $\angle A = 60^\circ$ ，且 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 $5\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的外接圓面積。

解析

令 $\triangle ABC$ 的內切圓與 \overline{AC} 、 \overline{BC} 、 \overline{AB} 分別相切於 D 、 E 、 F ，

$$\text{則 } \overline{AD} = \overline{AF} = 15, \overline{BE} = \overline{BF}, \overline{CD} = \overline{CE}, \text{ 得 } \overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CE} = \frac{108 - 30}{2} = 39$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{39}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = 13\sqrt{3} \therefore \text{ 外接圓面積為 } \boxed{507\pi}$$



7. 數字和為 12 的五位數共有多少個。

解析

設萬位、千位、百位、十位、個位數字分別為 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5

$$x_1 \geq 1 \text{ 令 } x_1' = x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = x_1' + 1, 0 \leq x_1' \leq 8 \Rightarrow x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$\text{全部方法} - (11, 0, 0, 0, 0) \text{ 排列法} - (10, 1, 0, 0, 0) \text{ 排列法} - (x_1' = 9)$$

$$\Rightarrow C_{11}^{15} - 5 - \frac{5!}{3!} - C_2^5 = \boxed{1330}$$

8. 求方程式 $x^6 + x^5 + x^4 - 28x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 的實根。

解析

$$x^3 + x^2 + x - 28 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 28 = 0$$

$$\text{令 } t = x + \frac{1}{x}$$

$$(t^3 - 3t) + (t^2 - 2) + t - 28 = 0 \Rightarrow t^3 + t^2 - 2t - 30 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t^2 + 4t + 10) = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \boxed{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

9. 求 $\sum_{k=1}^{119} |kx-1|$ 的最小值。

解析

$$\sum_{k=1}^{119} |kx-1| = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \dots + |119x-1| = |x-1| + 2\left|x-\frac{1}{2}\right| + 3\left|x-\frac{1}{3}\right| + \dots + 119\left|x-\frac{1}{119}\right|$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{119}, \dots, \frac{1}{119}$$

$$\text{共有 } 1+2+3+\dots+119 = \frac{1}{2}(120 \times 119) = 7140 \text{ 項}$$

$$1+2+3+\dots+84 = \frac{1}{2}(85 \times 84) = 3570$$

$$\text{第 } 3570 \text{ 項為 } \frac{1}{84}, \text{ 第 } 3571 \text{ 項為 } \frac{1}{85} \Rightarrow \text{中位數為 } m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{84} + \frac{1}{85}\right)$$

$$|x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \dots + |119x-1| \text{ 的最小值}$$

$$= (1-m) + (1-2m) + \dots + (1-84m) + (85m-1) + (86m-1) + \dots + (119m-1)$$

$$= 84 - (1+2+3+\dots+84)m + (85+86+87+\dots+119)m - 35$$

$$= 84 - 3570m + 3570m - 35$$

$$= \boxed{49}$$

10. 已知 $2x+y+16=0$ ，求 $\log_2 \frac{y}{x^2}$ 的最大值。

解析

$$\log_2 \frac{y}{x^2} = \log_2 \frac{-2x-16}{x^2}$$

$$\text{令 } k = \frac{-2x-16}{x^2} \Rightarrow kx^2 + 2x + 16 = 0 \Rightarrow 4 - 64k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{16}$$

$$\therefore \log_2 \frac{y}{x^2} \text{ 的最大值} = \log_2 \frac{1}{16} = \boxed{-4}$$