

新北市立板橋高級中學 107 學年度第 13 屆菩提盃數學競賽 **個人賽**

※競賽時間: 50 分鐘

※ 配分: 每題 2 分, 共 20 分

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足對任意整數 k , $a_1 + a_2 + \dots + a_k = k^2 a_k$ 均成立, 若 $a_1 = 2019$,

則 $a_{2019} =$ _____

2. 設 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數, 若 $a_n = \left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right]$,

則 $a_{161} - a_{160} =$ _____

3. 從 $1, 2, 3, \dots, 9$ 取出三個不同數並排成 3 位數, 其中能被 3 整除的三位數總和為 _____

4. 求解方程式 $\frac{4x}{x^2 + 2x + 4} - \frac{3x}{x^2 + x + 4} = \frac{1}{15}$ 的所有解: $x =$ _____

5. 函數 f 的定義域為所有正實數且滿足: (1) 當 $1 \leq x \leq 3$ 時 $f(x) = 1 - |x - 2|$

(2) 對任意正實數 x , $f(3x) = 3f(x)$ 。

試求滿足 $f(x) = 2019$ 的最小 x 為 _____

6. 若正整數 n 滿足 $2^n + 2^{16} + 2^{19}$ 為完全平方數, 則 $n =$ _____

7. 試找出所有整數序數 (a, b, c) 使得 $\frac{36}{385} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7} + \frac{c}{11}$ 且 $|a| < 5, |b| < 7, |c| < 11$

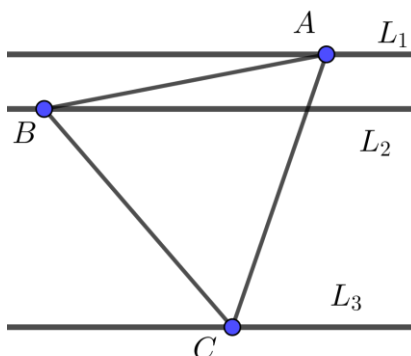
8. 有一圓內接四邊形, 若其四邊長分別為 $3, 5, 5, 5$, 則其外接圓面積為 _____

9. 若 x 為實數, 則 $\sqrt{x^4 + x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ 的最小值為 _____

10. 如圖 L_1, L_2, L_3 為三條平行線, L_1 和 L_2 間的距離為 1, L_2 和 L_3 間的距離為 4。若正三角形

$\triangle ABC$ 的三頂點分別在 L_1, L_2, L_3 上,

則 $\triangle ABC$ 的邊長為 _____



新北市立板橋高級中學 107 學年度第 13 屆菩提盃數學競賽

個人賽

答案卷

編號：_____ 隊名：_____ 姓名_____

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	

新北市立板橋高級中學 107 學年度 第 13 屆 菩提盃數學競賽 個人賽

答案

1.	$\frac{1}{1010}$
2.	4
3.	99900
4.	2, $4 \pm 2\sqrt{3}$
5.	4206
6.	20
7.	$(3, -1, -4), (-2, 6, -4), (-2, -1, 7)$
8.	$\frac{125\pi}{12}$
9.	$\sqrt{5}$
10.	$2\sqrt{7}$

參考答案

1. $k^2 a_k - (k-1)^2 a_{k-1} = a_k \Rightarrow a_k = \frac{k-1}{k+1} a_{k-1}$, $a_{2019} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 2018}{3 \times 4 \times \cdots \times 2020} \times 2019 = \frac{1}{1010}$ 。
2. 對所有 $1 \leq k \leq 160$, 可令 $161 = n+1 = Ak$ 使 $\left\lceil \frac{161}{k} \right\rceil = A = \left\lceil \frac{160}{k} \right\rceil + 1$, 又 $161 = 7 \times 23$, 故只有 1,7,23,161 共 4 個位置差 1 。
3. 分為 1,4,7、2,5,8、3,6,9 共 3 組 , 在每組中取或各組取 1 , 計算每個位置的頻率 $111 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9) \times (2+6 \times 3) = 99900$
4. 左式上下同除 x , 令 $x + \frac{4}{x} = t \Rightarrow \frac{4}{t+2} - \frac{3}{t+1} = \frac{1}{15} \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow t = 4$ or $t = 8$, 解 $x = 2$ or $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$
5. 令 $f(x) = 2019 = 2187 \times \frac{2019}{2187}$, 解 $1 - |x-2| = \frac{2019}{2187} \Rightarrow |x-2| = \frac{168}{2187} \Rightarrow x = 2 \pm \frac{168}{2187} \Rightarrow x = \frac{4542}{2187}$ 或 $x = \frac{4206}{2187}$
6. 令 $m^2 = 2^n + 2^{16} + 2^{19} = 2^n + 768^2 \Rightarrow 2^n = (m+768)(m-768)$, 故 $m \pm 768$ 皆為 2 的冪次 , 可知 $m \pm 768$ 分別為 512,2048 , 故 $2^n = 2^9 \times 2^{11} = 2^{20}$, 因此 $n = 20$
7. $36 = 77a + 55b + 35c \Rightarrow 36 - 77a = 55b + 35c = 5 \cdot (11b + 7c)$, 故 $36 - 77a$ 為 5 的倍數 , 檢查可得 $a = 3$ 或 -2 , 同理 $b = -1$ 或 6 , $c = -4$ 或 7 。三解 $(3, -1, -4)$, $(-2, 6, -4)$, $(-2, -1, 7)$
8. 必為等腰梯形 $ABCD$, 其中 $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 5$, 得 $\overline{AC} = 2\sqrt{10}$, $\cos A = \frac{-1}{5}$ 再由正弦定理有 $2R = \frac{\overline{AD}}{\sin B} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, 其中 R 為半徑 , 故圓面積為 $\frac{125\pi}{12}$
9. 配方 $\sqrt{(x-2)^2 + (x^2)^2} + \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$ 表示 $A(2,0)$, $B(0,1)$ 及拋物線 $y = x^2$ 上一點 $P(x, x^2)$ 中 , $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之值 , 當三點共線時有最小值 $\overline{AB} = \sqrt{5}$
10. 令邊長為 x , D, E 分別為 B 在 L_1, L_3 的投影點 , 則 $\overline{AD} = \sqrt{x^2 - 1}$, $\overline{CE} = \sqrt{x^2 - 16}$, $\overline{AC}^2 = x^2 = (4+1)^2 + (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 16})^2$, 展開平方移項得 $3x^2(x^2 - 28) = 0$, 故 $x = 2\sqrt{7}$