

<< 99 指考數乙詳解 >>

一、單選題

1. 關於行列式的性質，下列哪一選項恆成立？

<99 數乙>

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 1 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4) \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{vmatrix} = 0$$

$$(5) \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

解：(1) 行列互換，其值不變 \Rightarrow 左式 \neq 右式。

(2) 左式 $=bg-ah$ ，右式 $=ah-bg \Rightarrow$ 左式 \neq 右式。

(3) 正確。

(4) 所求 $=aei-cge \neq 0$ 。

$$(5) \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+e & b \\ c+g & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+e & f \\ c+g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ g & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & f \\ c & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

故選(3)。

2. 某校高三學生在一次考試中，成績呈常態分配，且已知其分數之平均數為 70 分，標準差為 10 分。若從這次考試的學生中，隨機抽出一位學生，則這位學生的成績低於 60 分的機率最接近以下哪一選項？ (1) 0.16 (2) 0.32 (3) 0.34 (4) 0.68 (5) 0.84 <99 數乙>

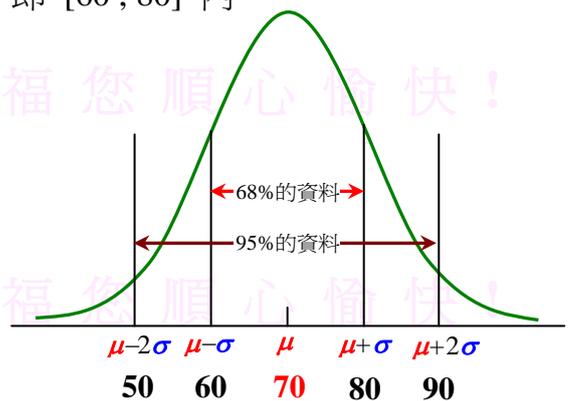
解：約 68% 的資料值，在區間 $[70-10, 70+10]$ 內，即 $[60, 80]$ 內。

\Rightarrow 60 分以下及 80 分以上，共佔 32%，

\Rightarrow 60 分以下及 80 分以上，各佔 16%，

\Rightarrow 低於 60 分有 16%。

故選(1)。



板橋高中數學科祝福您順心愉快！

板橋高中數學科祝福您順心愉快！

二、多選題

3. 關於多項式不等式： $x^2(x+5)(x+1)(x-4)(x-7) < (2x-3)(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)$ ，

下列哪些選項是它的一個解？ (1) -2π (2) $-\pi$ (3) π (4) 2π .

<99數乙>

解：原式 $\Rightarrow x^2 \boxed{(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)} - (2x-3) \boxed{(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)} < 0$

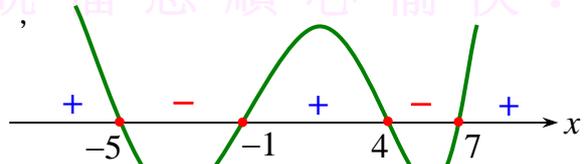
$$\Rightarrow (x+5)(x+1)(x-4)(x-7)[x^2 - (2x-3)] < 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x+1)(x-4)(x-7)(x^2 - 2x + 3) < 0 ,$$

又 $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ 恆大於 0

$$\therefore (x+5)(x+1)(x-4)(x-7) < 0$$

$$\Rightarrow -5 < x < -1 \text{ 或 } 4 < x < 7 . \text{故選(2)(4)} .$$



4. 關於指數函數或對數函數圖形的敘述，下列哪些選項是正確的？

<99數乙>

(1) $y=2010^x$ 的圖形恆在 $y=99^x$ 的上方

(2) $y = \log_{99} x$ 與 $y = 99^x$ 兩函數的圖形對稱於直線 $y = x$

(3) $y = \log_{99} x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{99}} x$ 兩函數的圖形對稱於x軸

(4) $y = \log_{2010}(x^2 - 10x + 33)$ 的圖形與x軸相交。

解：(1) $x \geq 0$ 時， $2010^x \geq 99^x$ ； $x < 0$ 時， $2010^x < 99^x$ 。

(2) $y = \log_{99} x$ 與 $y = 99^x$ ，為同底數之對數函數與指數函數，

\Rightarrow 圖形對稱於直線 $y=x$ 。

(3) 對稱於x軸 \Rightarrow 上下對稱 $\Rightarrow y$ 用 $-y$ 代入檢驗，

$$y = \log_{\frac{1}{99}} x \text{ 之 } y \text{ 用 } -y \text{ 代入得： } -y = \log_{\frac{1}{99}} x \Leftrightarrow y = -\log_{\frac{1}{99}} x \Leftrightarrow y = \log_{99} x .$$

(4) $\begin{cases} y = \log_{2010}(x^2 - 10x + 33) \\ y = 0(\text{x軸}) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 10x + 33 = 1 \Rightarrow (x-5)^2 + 7 = 0 \Rightarrow x \text{ 無實根(與 } x \text{ 軸不相交)} .$

故選(2)(3)。

三、選填題

- A. 某商店進一批水果，平均單價為每個 50 元，標準差為 10 元。今每個水果以進價的 1.5 倍為售價出售，則水果平均售價為每個_____元，標準差為_____元。 <99 數乙>

解： $\begin{cases} \bar{X} = 50 \\ S_X = 10 \end{cases}$ ，令 $Y = 1.5X \Rightarrow \begin{cases} \bar{Y} = 1.5\bar{X} = 1.5 \times 50 = 75 \\ S_Y = S_{1.5X} = 1.5(S_X) = 1.5 \times 10 = 15 \end{cases}$ 。

- B. 某公司委託經銷商銷售定價 a 元的產品，雙方言明，若經銷商減價 25 元賣出，則可得賣價的 8% 為佣金，若減價 125 元賣出，則可得賣價的 2% 為佣金；已知減價 25 元的佣金是減價 125 元佣金的 5 倍，則定價 $a =$ _____。

解：減價 25 元的佣金為 $(a-25) \cdot \frac{8}{100}$ ，減價 125 元的佣金為 $(a-125) \cdot \frac{2}{100}$
 $\Rightarrow (a-25) \cdot \frac{8}{100} = 5 \cdot (a-125) \cdot \frac{2}{100} \Rightarrow a = 525$ 。

- C. 棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

(一) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；

(二) 外野手 4 位（每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）；

(三) 另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有_____種先發守備陣容。（當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容）

解：投、捕、一壘已確定，只剩二壘、三壘、游擊、外野(3 位)，共 6 位可分配，

故所求 = $C_1^2 \times C_1^2 \times C_1^2 \times P_3^4 = 192$ 。

D. 某公司舉辦年終尾牙餐會，會中安插了一項抽獎活動。在抽獎箱中放了一副 52 張的撲克牌，每人抽出一張牌，且抽後放回；抽到紅心的紅色牌給獎金 8000 元，抽到方塊的紅色牌給獎金 6000 元，而抽到黑桃或梅花的黑色牌則一律給 2000 元的獎金。假設每張牌被抽到的機率相等，那麼抽到獎金的數學期望值為_____元。

解：∵ $P(\text{紅心}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ， $P(\text{方塊}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ， $P(\text{黑桃或梅花}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ ，
故所求 = $\frac{1}{4} \times 8000 + \frac{1}{4} \times 6000 + \frac{1}{2} \times 2000 = 4500$ 。

E. 調查某國家某一年 5 個地區的香煙與肺癌之相關性，所得到的數據為 (x_i, y_i) ， $i=1, 2, 3, 4, 5$ ，其中變數 X 表示每人每年香煙消費量（單位：十包），
 Y 表示每十萬人死於肺癌的人數。若已計算出下列數值：

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 135, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 3661, \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 2842, \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 105, \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 2009,$$

則 X 與 Y 的相關係數 $r = 0.。$

(參考說明：相關係數 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2}}$)

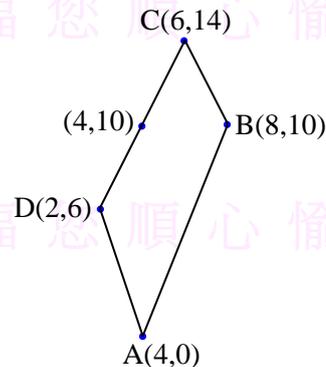
解：∵ $\bar{x} = \frac{135}{5} = 27$ ， $\bar{y} = \frac{105}{5} = 21$ ，∴ $r = \frac{2842 - 5 \cdot 27 \cdot 21}{\sqrt{3661 - 5 \cdot 27^2} \cdot \sqrt{2009 - 5 \cdot 21^2}} = 0.875$ 。

F. 已知一個線性規劃問題的可行解區域為四邊形 $ABCD$ 及其內部，其中 $A(4, 0)$ ， $B(8, 10)$ ， $C(6, 14)$ ， $D(2, 6)$ 為坐標平面上的四個點。若目標函數 $k = ax + by + 32$ (a, b 為實數) 在四邊形 $ABCD$ 的邊界上一點 $(4, 10)$ 有最小值 18，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 <99 數乙>

解：∵ $(6, 14)$ ， $(2, 6)$ ， $(4, 10)$ 三點共線，
∴ 在 $(6, 14)$ 與 $(2, 6)$ 亦有最小值 18，

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a + 14b + 32 = 18 \\ 2a + 6b + 32 = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 14, b = -7。$$



第貳部分：非選擇題

1. 設 a, b, c, d 都是 20 以內的正奇數，考慮五次整係數多項式函數

$$p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2 .$$

(1) 試問滿足上述條件的五次整係數多項式函數 $p(x)$ 共有多少個？

(2) 試求多項式方程式 $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的所有整數根。

解：(1) 20 以內的正奇數有 1, 3, 5, ..., 19 共 10 個，故所求 = $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ 個。

(2) 由牛頓定理得整數根可能為 1, -1, 2, -2，

$$\text{令 } p(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 ,$$

再將其一一代入 $p(x)$ ，得 $p(1) \neq 0, p(-1) \neq 0, p(2) \neq 0, p(-2) \neq 0$ ，

\therefore 整數根為 -2。

2. 小惠有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，志明向她借用這台自行車，她答應借出，但只告訴志明號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：

$$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} ,$$

志明卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車。請你（妳）幫忙志明求出這副號碼鎖的正確密碼。

$$\text{解：} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 35 & 15 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 175 & 75 \\ 50 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$