

<< 98 指考數乙詳解 >>

一、單選題

1. 箱子裡有 30 顆紅球，20 顆藍球。小明從箱子中隨機抽出 1 顆球，記錄球的顏色後放回。重複此動作 5 次，並依序記錄。下列各選項都是小明可能呈現的紀錄，<98 數乙>
試問哪一選項發生的機率最大？

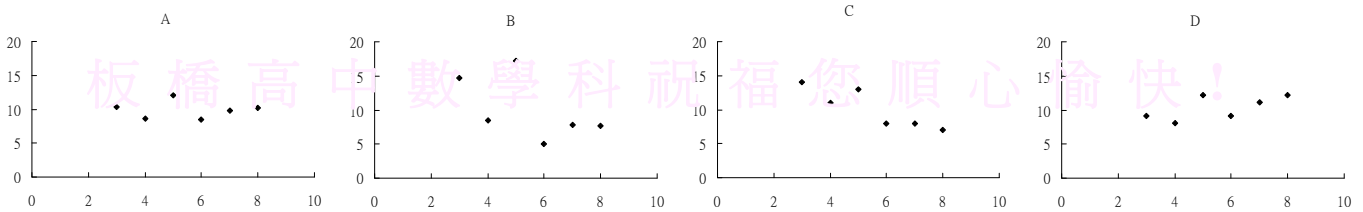
(1) 紅紅紅紅紅 (2) 藍藍藍藍藍 (3) 紅紅藍紅紅 (4) 紅藍紅藍紅 (5) 藍紅紅藍紅。

解：(1) $(\frac{3}{5})^5 = \frac{243}{3125}$ ，(2) $(\frac{2}{5})^5 = \frac{32}{3125}$ ，(3) $(\frac{3}{5})^4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{162}{3125}$ ，(4) $(\frac{3}{5})^3 (\frac{2}{5})^2 = \frac{108}{3125}$ ，(5) $(\frac{3}{5})^3 (\frac{2}{5})^2 = \frac{108}{3125}$ 。

故選(1)。

2. A, B, C, D 是四組資料的散佈圖，如圖所示。利用最小平方法計算它們的迴歸直線，發現有兩組資料的迴歸直線相同，試問是哪兩組？<98 數乙>

(1) A, B (2) A, C (3) A, D (4) B, C (5) B, D 。



解：由散佈圖發現 B, C 為負相關， A 為零相關， D 為正相關，故選(4)。

二、多選題

3. 若 (a, b) 是對數函數 $y = \log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形？

(1) $(1, 0)$ (2) $(10a, b+1)$ (3) $(2a, 2b)$ (4) $(\frac{1}{a}, 1-b)$ (5) $(a^2, 2b)$ 。<98 數乙>

解：(1) $\log 1 = 0$ 。

(2) $\log 10a = \log 10 + \log a = 1 + b$ 。

(3) $\log 2a = \log 2 + \log a = \log 2 + b \neq 2b$ 。

(4) $\log \frac{1}{a} = -\log a = -b \neq 1 - b$ 。

(5) $\log a^2 = 2 \log a = 2b$ 。

故選(1)(2)(5)。

4. 國一學生 30 萬人，智商測驗的結果是「平均數 100，標準差 15」的常態分配。若以智商 130 以上做為甄選國一學生為資優生的門檻，則根據這次測驗的結果判斷下列選項中的敘述，哪些是正確的？ <98 數乙>

- (1) 約有 5% 的國一學生通過資優生甄選門檻
- (2) 約有 15 萬名國一學生的智商在 100 以上
- (3) 超過 20 萬名國一學生智商介於 85 至 115 之間
- (4) 隨機抽出 1000 名國一學生，可期望有 25 名資優生
- (5) 如果某偏遠學校只有 14 名的國一學生，那麼該校不會有資優生。

解： (1) $(100\% - 95\%) \div 2 = 2.5\%$ 。

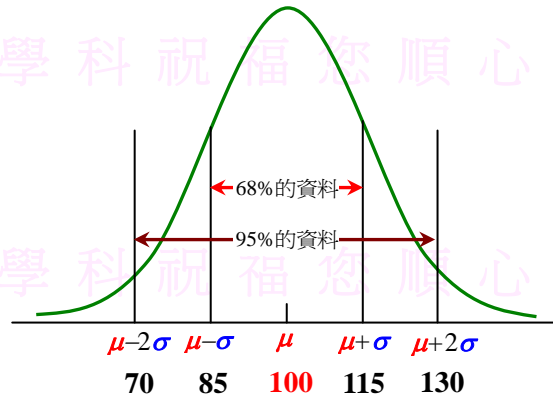
(2) $30 \times 0.5 = 15$ 。

(3) $30 \times 0.68 = 20.4$ 。

(4) $1000 \times 2.5\% = 25$ 。

(5) 不一定。

故選(2)(3)(4)。



5. 經濟學者分析某公司服務年資相近的員工之「年薪」與「就學年數」的資料， <98 數乙> 得到這樣的結論：『員工就學年數每增加一年，其年薪平均增加 8 萬 5 千元』。

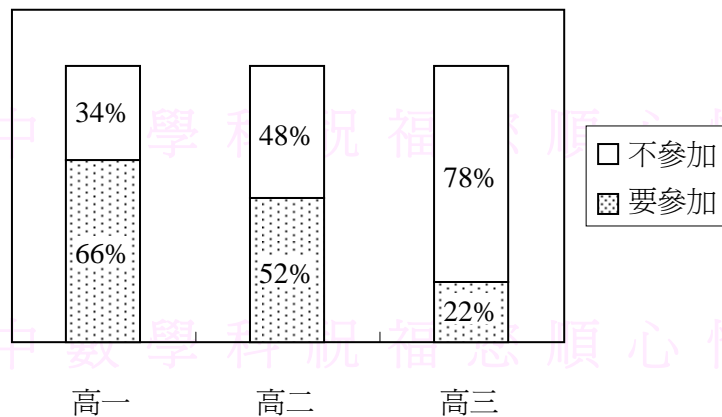
試問上述結論可直接從下列哪些選項中的統計量得到？

- (1) 「年薪」之眾數與「就學年數」之眾數
- (2) 「年薪」之全距與「就學年數」之全距
- (3) 「年薪」之平均數與「就學年數」之平均數
- (4) 「年薪」與「就學年數」之相關係數
- (5) 「年薪」對「就學年數」之迴歸直線斜率。

解： 設就學年數為 x ，年薪為 y ，則 $y = 8.5x + k$ (萬元)，其中 k 為常數。

顯然，年薪對就學年數之迴歸線斜率為 8.5，**故選(5)。**

6. 某縣市教育局欲瞭解高中生參加課外活動社團的意願，開學日隨機調查高一、高二、高三學生各 1067 名，詢問本學期是否要參加課外活動社團。已知該縣市的高一、高二、高三學生人數幾乎一樣多，各年級學生調查結果如下圖：<98 數乙>



試問下列選項中的敘述，哪些是正確的？

- (1) 學生要參加課外活動社團之比例隨著年級增加而遞減。
- (2) 由上述資訊可以估算全體學生要參加課外活動社團的比例。
- (3) 在 95% 信心水準下，每一個年級學生要參加課外活動社團的比例之信賴區間，都可以由題目中已知的數據算出。
- (4) 在 95% 信心水準下，三個年級的調查結果，以高一學生要參加課外活動社團的比例的信賴區間最長。
- (5) 在 95% 信心水準下，三個年級的調查結果，以高三學生要參加課外活動社團的比例的信賴區間最短。

解： (1) $66\%(\text{高一}) > 52\%(\text{高二}) > 22\%(\text{高三})$ 。

(2) 約 $\frac{1}{3}(66\% + 52\% + 22\%) = 47\%$ 。

(3) 信賴區間為 $p \pm 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ，其中 p 表比例， n 表人數皆已知，所以可算出。

(4)(5) 信賴區間長度為 $4\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ，當 $p = \frac{1}{2}$ 時， $p(1-p)$ 有最大值。(∵ n 為定值)

p 越接近 50% 者，信賴區間越大。∴ 長度大小為高二 > 高一 > 高三。

故選(1)(2)(3)(5)。

三、選填題

7. 陳先生三年前買了一輛剛出廠的新車買價 100 萬元；該汽車的價值在第一年後折舊 20%，第二年以後每年折舊前一年車價的 15%。陳先生現在想用這部車換新車，試問舊車可抵多少萬元？答：_____萬元。（萬元以下四捨五入） <98 數乙>

解：折舊 20%，即為原價 80%，故所求 = $100 \times 0.8 \times 0.85 \times 0.85 = 57.8 \approx 58$ (萬元)。

8. 某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率（即偵測錯誤的機率）。共有 760 人接受此血液偵測技術實驗，實驗前已知樣本中有 735 人未患老年癡呆症。實驗後，血液偵測判斷為未患老年癡呆症者有 665 人，其中真正未患老年癡呆症有 660 人。試問此血液偵測技術的誤判率為_____。（化成最簡分數）

前 實驗後	實驗		合計
	有病	沒病	
有病	20	75	95
沒病	5	660	665
合計	25	735	

解：由右表得所求有病誤判為沒病的有 5 人，沒病誤判為

有病的有 75 人，故所求 = $\frac{5+75}{760} = \frac{2}{19}$ 。

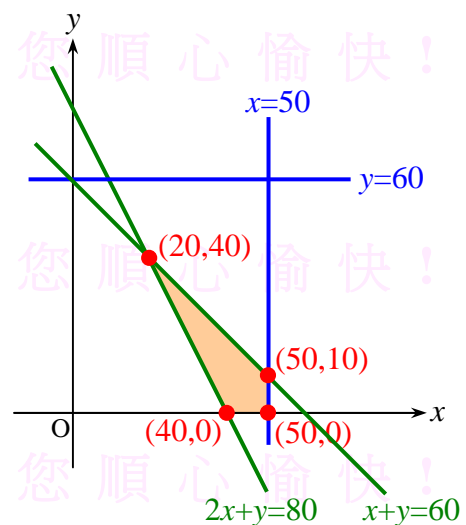
9. 某公司招聘新員工，共有 1600 人應徵參加筆試。筆試場地借用甲大學的教室，該校可租借的大教室有 50 間，每間可容納 40 人，每間租金 500 元；小教室有 60 間，每間可容納 20 人，每間租金 150 元。考慮監考人員的限制，筆試教室不能超過 60 間。試問租借大教室_____間，小教室_____間，來進行筆試，最省租借場地費用。

解：設大教室 x 間，小教室 y 間，

$$\text{可行解區域：} \begin{cases} 40x + 20y \geq 1600 \\ x + y \leq 60 \\ 0 \leq x \leq 50 \\ 0 \leq y \leq 60 \end{cases}, \text{ 且 } x, y \text{ 為整數,}$$

⇒ 求 $500x + 150y$ 之最小值，

	(20, 40)	(40, 0)	(50, 0)	(50, 10)
$500x + 150y$	16000	20000	25000	26500
	最小值			最大值



故所求大教室 20 間，小教室 40 間。

10. 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有_____種畫法。

解：企無企無貓貓貓 $\Rightarrow \left(\begin{matrix} 2! \\ \text{企無互換} \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} 3! \\ \text{企無貓互換} \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} 2! \\ \text{企無、貓貓前後互換} \end{matrix} \right) = 24$ ， <98 數乙>

企貓企無貓貓無 $\Rightarrow \left(\begin{matrix} 2! \\ \text{企貓互換} \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} 3! \\ \text{企無貓互換} \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} 2! \\ \text{貓無互換} \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} 2! \\ \text{企貓、貓無前後互換} \end{matrix} \right) = 48$ ，

故所求共 $24+48=72$ 種。

第貳部分：非選擇題

1. 某製造玩具工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x)=5+2x$ ，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係： <98 數乙>

數量 (千個)	報價總值 (萬元)
5	37.5
10	70
15	97.5

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$ ，以及獲利函數 $h(x) = g(x) - f(x)$ 。

- 若接到訂單為 20 千個 試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元？
- 試求報價總值函數 $g(x)$ 。
- 根據 $h(x)$ ，試問訂單數量是多少時，獲利總值最高？

解：(1) $\because f(20) = 5 + 2 \times 20 = 45$ (萬元)， \therefore 所求 $= \frac{45}{20} = 2.25$ (萬元)。

(2) 令 $g(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} g(5) = 25a + 5b + c = 37.5 \\ g(10) = 100a + 10b + c = 70 \\ g(15) = 225a + 15b + c = 97.5 \end{cases}$ ，

$\Rightarrow a = -\frac{1}{10}$ ， $b = 8$ ， $c = 0$ $\therefore g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 8x$ 。

(3) $h(x) = g(x) - f(x) = \left(-\frac{1}{10}x^2 + 8x\right) - (5 + 2x) = -\frac{1}{10}x^2 + 6x - 5 = -\frac{1}{10}(x-30)^2 + 85$ ，

所以訂單數量是 30 千個時，獲利總值最高。

2. 設有 A, B 兩支大瓶子, 開始時, A 瓶裝有 a 公升的純酒精, B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶, 然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶 (不考慮酒精與水混合後體積的縮小)。設 n 輪操作後, A 瓶有 a_n 公升的溶液,

B 瓶有 b_n 公升的溶液。已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 。

(1) 求二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 。(2) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時, 求 a_{100} 與 b_{100} 。

(3) 當 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時, 在第二輪操作後, A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精? <98 數乙>

解: (1) 經過第一輪後, A 瓶有 $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}(\frac{a}{2} + b) = \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b$, 令 $a_1 = \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b$;

B 瓶有 $\frac{1}{2}(\frac{a}{2} + b) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b$, 令 $b_1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b$,

$$\text{則 } \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ 故 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(2) \because \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{100} = \frac{2}{3}, b_{100} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \because \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16}a + \frac{5}{8}b \\ \frac{5}{16}a + \frac{3}{8}b \end{bmatrix}, \therefore a_2 = \frac{11}{16}a + \frac{5}{8}b,$$

$$\text{故所求} = \frac{\frac{11}{16}a}{\frac{11}{16}a + \frac{5}{8}b} = \frac{\frac{11}{16} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{11}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{11}{24}}{\frac{11}{24} + \frac{5}{24}} = \frac{11}{16} = 68.75\%.$$