

<< 95 指考數乙詳解 >>

一、單選題

1. 在坐標平面上，選出與圓 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ 相切的直線：

- (1) $3x+4y=5$ (2) $3x+4y=0$ (3) $4x+3y=5$ (4) $4x+3y=0$ (5) $4x+3y=1$

解：令圓心為 $C(3, 4)$ ，半徑 $r=5$ ，

$$(1) L_1: 3x+4y-5=0 \Rightarrow d(C, L_1) = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4 < r \Rightarrow L \text{ 爲割線。}$$

$$(2) L_2: 3x+4y=0 \Rightarrow d(C, L_2) = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5 = r \Rightarrow L \text{ 爲切線。}$$

$$(3) L_3: 4x+3y-5=0 \Rightarrow d(C, L_3) = \frac{|4 \times 3 + 3 \times 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{19}{5} < r \Rightarrow L \text{ 爲割線。}$$

$$(4) L_4: 4x+3y=0 \Rightarrow d(C, L_4) = \frac{|4 \times 3 + 3 \times 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5} < r \Rightarrow L \text{ 爲割線。}$$

$$(5) L_5: 4x+3y-1=0 \Rightarrow d(C, L_5) = \frac{|4 \times 3 + 3 \times 4 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{23}{5} < r \Rightarrow L \text{ 爲割線。}$$

故選(2)。

2. 某大學數學系甄選入學的篩選方式如下：

先就學科能力測驗國文、英文和社會這三科成績（級分）加總做第一次篩選。

然後從通過篩選的學生當中，以自然科的成績做第二次篩選。

最後再從通過的學生當中，以數學科的成績做第三次篩選，選出一些學生參加面試。

現在有五位報名該系的學生的學科能力測驗成績如下表：

學生	國文級分	英文級分	數學級分	社會級分	自然級分
甲	13	8	14	15	11
乙	12	12	12	12	12
丙	9	13	15	8	15
丁	11	12	13	10	13
戊	13	15	11	7	12

已知這五位學生當中，通過第一次篩選的有四位，通過第二次篩選的有三位，

通過第三次篩選可以參加面試的只剩下一位。請問哪一位學生參加面試？

- (1) 甲 (2) 乙 (3) 丙 (4) 丁 (5) 戊

解：各次篩選結果如下：

	第一次	第二次	第三次	面試
甲	36	11	×	×
乙	36	12	12	×
丙	30	×	×	×
丁	33	13	13	○
戊	35	12	11	×

故選(4)。

3. 假設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是空間中三個向量， r 是一個實數。已知 $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 1, 1)$

且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 滿足 $\vec{a} + \vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ ，那麼 r 不可能等於下列哪一個數值：

- (1) $-\sqrt{2}$ (2) 0 (3) 1 (4) π (圓周率) (5) 10^{100}

解： $\vec{a} + \vec{b} + r\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow r\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b}) = -(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = -(1, 2, 1)$ ，

① 當 $r=0$ 時， $\Rightarrow r\vec{c} = \vec{0} \neq -(1, 2, 1)$ 。

② 當 $r \neq 0$ 時， $r\vec{c} = -(1, 2, 1) \Rightarrow \vec{c} = \frac{-1}{r}(1, 2, 1)$ 。當 r 確定時，則 $\vec{c}$ 也跟著確定。 **故選(2)。**

二、多選題

1. 嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成（令它們的邊長均為 1）的平面圖形，如右圖所示：試問以下哪些選項是正確的？

(1) $\angle BAC = 54^\circ$ (2) O 是 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心

(3) $\overline{AB} = \sqrt{3}$ (4) $\overline{BC} = 2\sin 66^\circ$

解： (1) $\angle CAO = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$ ， $\angle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle BAC = 30^\circ + 36^\circ = 66^\circ$ 。

(2) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1 \Rightarrow O$ 為 $\triangle ABC$ 的外心。

(3) $\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2})} = \sqrt{3}$ 。

(4) $\triangle ABC$ 中， $\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = 2R \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\sin 66^\circ} = 2 \cdot 1 \Rightarrow \overline{BC} = 2\sin 66^\circ$ 。

故選(2)(3)(4)。

2. 一個「訊息」是由一串 5 個數字排列組成，且每位數字都只能是 0 或 1，例如 10010 與 01011 就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串 10010 與 01011 在第 1，2 及 5 三個位置不同，所以訊息 10010 與 01011 的距離為 3。試問以下哪些選項是正確的？

(1) 與訊息 10010 相距最遠的訊息為 11101

(2) 任兩訊息之間的最大可能距離是 4

(3) 與訊息 10010 相距為 1 的訊息恰有 5 個

(4) 與訊息 10010 相距為 2 的訊息恰有 9 個

解： 與已知字串的每個數字都不同的字串有最大的距離 5。

(1) 與訊息 10010 相距最遠（即最大）為訊息 01101。

(2) 最大距離為 5。

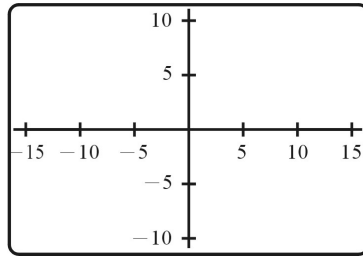
(3) 與訊息 10010 的距離為 1 的訊息是恰有一數字不同的訊息，有 $C_1^5 = 5$ 個。

如右：00010，11010，10110，10000，10011。

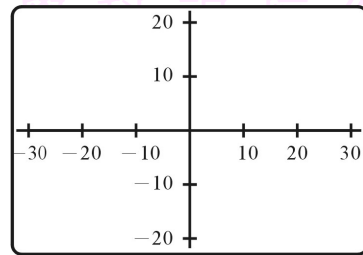
(4) 與訊息 10010 的距離為 2 的訊息是恰有二數字不同的訊息，有 $C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ 個。

故選(3)。

3. 一個函數繪圖軟體的視窗預設的坐標平面之可視範圍為 $-15 \leq x \leq 15$ 及 $-10 \leq y \leq 10$ ，如下圖所示：



當我們把視窗的比例尺調整為原來的二分之一時，視窗的可視範圍變成 $-30 \leq x \leq 30$ 及 $-20 \leq y \leq 20$ ，如下圖所示：



試問以下哪些選項是正確的？

- (1) 如果把視窗的比例尺調整為原來的三分之一，
那麼視窗的可視範圍變成 $-45 \leq x \leq 45$ 及 $-30 \leq y \leq 30$ ；
- (2) 如果把視窗的比例尺調整為原來的二分之一，那麼坐標平面上任一直線的斜率也變成原來的二分之一；
- (3) 使用預設的視窗時，只能看到 $y = x^2 - 30x + 190$ 與 $y = 5x - 60$ 這兩個圖形的一個交點；
- (4) 如果把視窗的比例尺調整為原來的五分之一，
就可以看到 $y = x^2 - 30x + 190$ 與 $y = 5x - 60$ 這兩個圖形所有的交點。

解：已知 $-15 \leq x \leq 15$ 且 $-10 \leq y \leq 10$

- (1) 當視窗比例尺縮為原來的 $\frac{1}{3}$ 時，視窗的可視範圍為
 $-15 \times 3 \leq x' \leq 15 \times 3$ 且 $-10 \times 3 \leq y' \leq 10 \times 3$ ，即 $-45 \leq x' \leq 45$ 且 $-30 \leq y' \leq 30$
- (2) x 軸與 y 軸的調整比例相同，所以，坐標平面上的任一直線斜率不變
- (3) 在預設視窗上，拋物線與直線的交點
$$\begin{cases} y = x^2 - 30x + 190 \\ y = 5x - 60 \end{cases}$$
 的解 $(x, y) = (10, -10), (25, 65)$

其中點 $(10, -10)$ 在可見的範圍內，而點 $(25, 65)$ 在範圍外

- (4) 視窗比例尺調整為原來的 $\frac{1}{5}$ 時，視窗的可視範圍為
 $-15 \times 5 \leq x'' \leq 15 \times 5$ 且 $-10 \times 5 \leq y'' \leq 10 \times 5$ ，即 $-75 \leq x'' \leq 75$ 且 $-50 \leq y'' \leq 50$

由 (3) 的結果可知交點 $(10, -10)$ 在可見的範圍內，而點 $(25, 65)$ 還是在範圍外

故選(1)(3)。

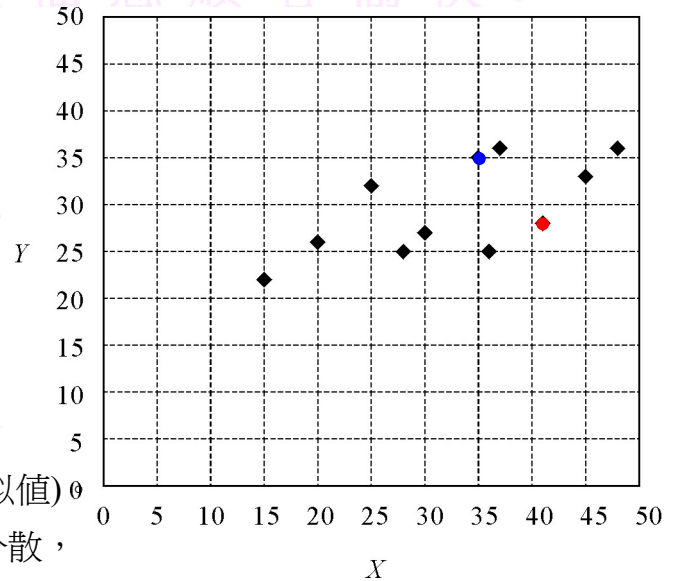
4. 某次數學測驗分為選擇題與非選擇題兩部分。下列的散布圖中每個點(X , Y)分別代表一位學生於此兩部分的得分，其中 X 表該生選擇題的得分， Y 表該生非選擇題的得分。

設 $Z=X+Y$ 為各生在該測驗的總分。

共有 11 位學生的得分數據。

試問以下哪些選項是正確的？

- (1) X 的中位數 $> Y$ 的中位數
- (2) X 的標準差 $> Y$ 的標準差
- (3) X 的全距 $> Y$ 的全距
- (4) Z 的中位數 $= X$ 的中位數 $+ Y$ 的中位數



解：(1) X 由左至右之第 6 個數為中位數：**35**。

Y 由下而上之第 6 個數為中位數：**28**(近似值)。

- (2) 資料左右範圍分佈較上下範圍分佈來得分散，

$\Rightarrow X$ 的標準差 $> Y$ 的標準差。

- (3) 資料左右最大差距大於上下最大差距。

$\Rightarrow X$ 的全距 $> Y$ 的全距。

- (4) X 的中位數 $+ Y$ 的中位數 $= 35 + 28 = 63$ 。

$X+Y$ 的排序：15+22，20+26，28+25，25+32，30+27，36+25，**41+28**，...

即 Z 排序：37，46，53，57，57，**61**，69，...， $\Rightarrow$ 中位數 **61**。

$\Rightarrow Z$ 的中位數 $\neq X$ 的中位數 $+ Y$ 的中位數。

故選(1)(2)(3)。

三、選填題

1. 一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜園，

並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如右圖示。

此農夫所能圍成的最大面積為_____平方公尺。

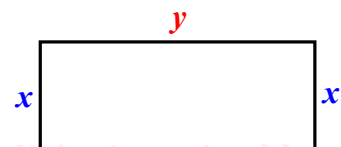


解：如右圖，設長方形兩邊長 x 公尺，另兩邊長 y 公尺（含下方出入口 2 公尺）

則 $2x+2y-2=66$ ，即 $x+y=34$ ，

$$\text{由 } \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{34}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow 17^2 \geq xy \Rightarrow 289 \geq xy。$$

當 $x=y=17$ 時，長方形有最大面積 289（平方公尺）。

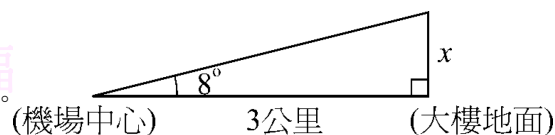


2. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過 8° 。某建築公司打算在離機場中心 3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層高 5 公尺的大樓。在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋_____層樓。〔參考數據： $\sin 8^\circ \approx 0.1392$ ， $\cos 8^\circ \approx 0.9903$ ， $\tan 8^\circ \approx 0.1405$ 〕

解：如右圖，設大樓的高為 x （公尺）

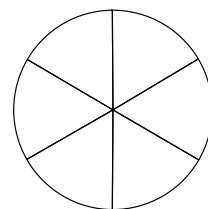
$$\text{若 } \tan 8^\circ = \frac{x}{3000}, \text{ 則 } x = 3000 \tan 8^\circ = 3000 \times 0.1405 \approx 421.5。$$

$$\therefore \frac{421.5}{5} = 84.3 \quad \therefore \text{大樓每層 5 公尺時，大樓最多可蓋 84 層樓。}$$



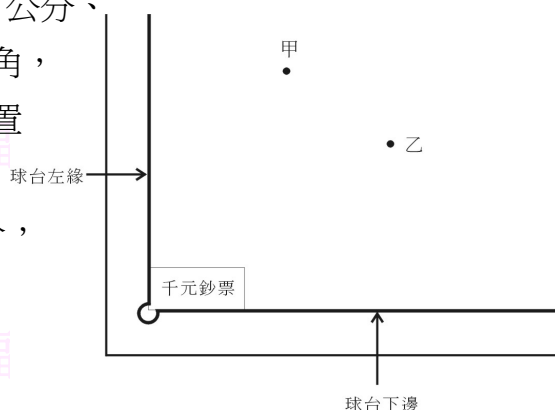
3. 如下圖所示，某摩天輪等分為 6 個全等區域。為了夜間的燈光造景，6 個區域分別採用不同顏色的燈光裝飾。若有 7 種不同顏色的燈光可供使用，則此摩天輪正面的夜間燈光造景共有_____種不同的顏色排列方式。

解：所求為從 7 色找 6 相異色之排列方法，共有 $\frac{P_7^6}{6} = 7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 840$ 種。



第貳部分：非選擇題

1. 珈慶杯撞球大賽的勝負是這樣決定的：裁判將寬 16 公分、長 7 公分的千元鈔票貼邊放置在長方形球台的左下角，如右圖所示。甲、乙兩參賽者分別擊球，球靜止位置離鈔票中心點較近者獲勝。甲、乙擊球後，裁判拿尺仔細量得甲所擊球停在離球台左緣 23 公分，離球台下邊 39.5 公分處；乙所擊球停在離球台左緣 40 公分，離球台下邊 27.5 公分處。



- (1) 已知 $\sqrt{1521}$ 是一個正整數，求此正整數。
- (2) 求甲所擊球停止位置與鈔票中心點的距離。（答案必須以最簡單的形式表示）
- (3) 如果你是裁判，你會裁定甲或乙獲勝？理由為何？（6 分）

解：建立坐標系，如右圖，設 G ， A ， B 分別表示

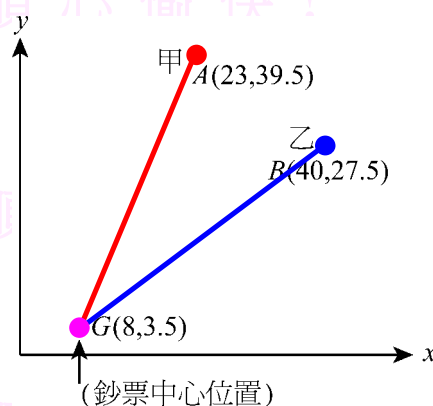
鈔票中心、甲、乙三點的位置，其坐標如圖

$$(1) \sqrt{1521} = \sqrt{3^2 \times 13^2} = 3 \times 13 = 39。$$

$$(2) \overline{GA} = \sqrt{(23-8)^2 + (39.5-3.5)^2} = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{3^2(5^2 + 12^2)} \\ = \sqrt{3^2 \times 13^2} = \sqrt{1521} = 39 \text{ (公分)}$$

$$(3) \overline{GB} = \sqrt{(40-8)^2 + (27.5-3.5)^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{8^2(4^2 + 3^2)} = \sqrt{8^2 \times 5^2} \\ = 8 \times 5 = 40 \text{ (公分)}$$

$$\therefore \overline{GA} < \overline{GB}, \therefore \text{甲獲勝。}$$



2. 為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A、至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

(1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ 兩個條件外，寫下 x ， y 必須滿足的不等式組。

(2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x ， y 的值為何？

最少的飼料成本又是多少？

解：(1) 由題意可得 x ， y 須滿足
$$\begin{cases} 7x + 2y \geq 84 \\ 3x + 6y \geq 72 \\ 3x + 2y \geq 60 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 7x + 2y \geq 84 \cdots \textcircled{1} \\ x + 2y \geq 24 \cdots \textcircled{2} \\ 3x + 2y \geq 60 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

(2) 將 (1) 中 $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ ， $\textcircled{3}$ 式分別作圖如右

先作 $L_1: 7x + 2y = 84$ ，過點 $(12, 0)$ ， $(0, 42)$

$L_2: x + 2y = 24$ ，過點 $(24, 0)$ ， $(0, 12)$

$L_3: 3x + 2y = 60$ ，過點 $(20, 0)$ ， $(0, 30)$

由上面 L_1 ， L_3 可得兩線的交點 $(6, 21)$

由 L_2 ， L_3 可得兩線的交點 $(18, 3)$ 且 L_2 交 x 軸於 $(24, 0)$

在題意要求下，欲達營養要求，其可行區為圖中的斜影部分

設 $f(x, y)$ 表飼料的成本，(x ， y 分別表購買第一、第二種飼料的公斤數)，

則 $f(x, y) = 5x + 4y$ ，現在欲使成本最少，則必使 $f(x, y)$ 的值最小

由線性規畫原理可知，

$f(x, y)$ 的最小值在可行區的邊界端點上檢驗可得

$f(0, 42) = 4 \times 42 = 168$ ， $f(6, 21) = 5 \times 6 + 4 \times 21 = 114$ ， $f(18, 3) = 5 \times 18 + 4 \times 3 = 102$ ，

$f(24, 0) = 5 \times 24 = 120$ 。

由此可知當 $x = 18$ 公斤， $y = 3$ 公斤時，飼料成本為 102 元最少。

