

<< 89 指考數乙詳解 >>

一、多重選擇題

1. 關於多項式 $f(x) = x^4 - 15$ ，下列選項何者為真？

<89 數乙>

- (1) $f(x) = 0$ 在 1 與 2 之間有一實根 (2) $f(x) = 0$ 在 -2 與 -1 之間有一實根
(3) $f(x) = 0$ 沒有大於 2 的實根 (4) $f(x) = 0$ 沒有小於 -2 的實根
(5) $f(x) = 0$ 有四個實根。

解： $\because f(x) = x^4 - 15 = (x^2 - \sqrt{15})(x^2 + \sqrt{15})$

$\therefore f(x) = 0$ 有二個實根，二個虛根。

且 $f(0) < 0$ ， $f(1) < 0$ ， $f(2) > 0$ ，

$f(-1) < 0$ ， $f(-2) > 0$ ， $f(-3) > 0$ ，

由勘根定理知：在區間 (1, 2) 與 (-2, -1) 內，各有一實根。

故選(1)(2)(3)(4)。

2. 下列選項何者為真？

<89 數乙>

- (1) $\frac{2^{10} + 2^{20}}{2} > \sqrt{2^{10} \cdot 2^{20}}$ (2) $\frac{(\frac{1}{2})^{10} + (\frac{1}{2})^{20}}{2} > \sqrt{(\frac{1}{2})^{10} \cdot (\frac{1}{2})^{20}}$ (3) $\sqrt{10} + \sqrt{20} > \sqrt{30}$
(4) $\log 10 + \log 20 > \log 30$ (5) $\frac{10^2 + 20^2}{2} > (\frac{10+20}{2})^2$

解： (1)(2) 由算幾不等式知 \Rightarrow (1)(2) 正確。

(3) $(\sqrt{10} + \sqrt{20})^2 = 10 + 2\sqrt{200} + 20 > 30 = (\sqrt{30})^2 \Rightarrow$ (3) 正確。

(4) $\log 10 + \log 20 = \log(10 \times 20) = \log 200 > \log 30 \Rightarrow$ (4) 正確。

(5) $\frac{10^2 + 20^2}{2} = \frac{500}{2} > 225 = (\frac{10+20}{2})^2 \Rightarrow$ (5) 正確。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

3. 如圖， $ABCD - A'B'C'D'$ 為立方體的八個頂點。試問下列哪些線段會與線段 $\overline{A'B}$ 共平面？

- (1) $\overline{BC'}$ (2) \overline{AC} (3) $\overline{DB'}$ (4) $\overline{DD'}$ (5) $\overline{CD'}$

<89 數乙>

解： 空間中二平行直線或二相交直線可決定一平面。

(1) $\overline{BC'}$ 與 $\overline{A'B}$ 交於 $B \Rightarrow$ 共平面。

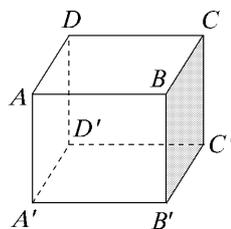
(2) \overline{AC} 與 $\overline{A'B}$ 為歪斜 \Rightarrow 不共平面。

(3) $\overline{DB'}$ 與 $\overline{A'B}$ 為歪斜 \Rightarrow 不共平面。

(4) $\overline{DD'}$ 與 $\overline{A'B}$ 為歪斜 \Rightarrow 不共平面。

(5) $\overline{CD'}$ 與 $\overline{A'B}$ 平行 \Rightarrow 共平面。

故選(1)(5)。



4. 坐標平面上拋物線 $C: y = -4x^2 + 9$ 以外部分被 C 分成兩個不相交區域，試問下列哪些點與拋物線的焦點位於同一區域？

<89 數乙>

- (1) $(\frac{3}{2}, 2)$ (2) $(1, 4)$ (3) $(-\frac{1}{2}, 7)$ (4) $(\frac{1}{2}, 7)$ (5) $(0, 9)$

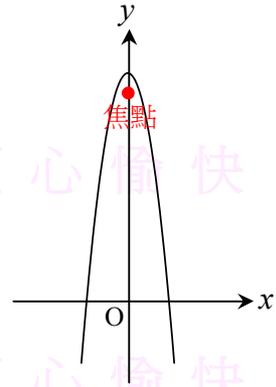
解： $y = -4x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4}(y-9) \Rightarrow c = -\frac{1}{16}$ ，焦點為 $(0, \frac{143}{16})$

令 $f(x, y) = 4x^2 + y - 9$ ，

$\Rightarrow f(0, 0) = -9 < 0 \Rightarrow f(0, \frac{143}{16}) < 0$ (\because 焦點與 $(0, 0)$ 在同一區域)

則 $f(\frac{3}{2}, 2) = 2 > 0$ ， $f(1, 4) = -1 < 0$ ，

$f(-\frac{1}{2}, 7) = -1 < 0$ ， $f(\frac{1}{2}, 7) = -1 < 0$ ， $f(0, 9) = 0$ 。



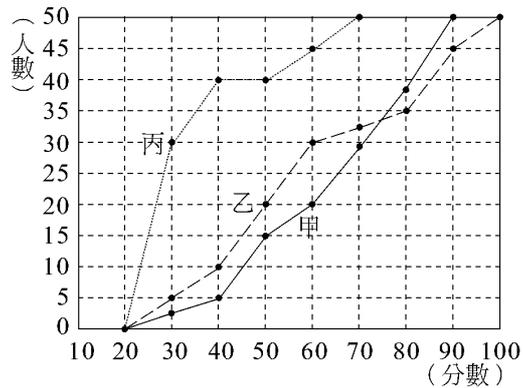
故選(2)(3)(4)。

5. 某校高三甲、乙、丙三班各有 50 位同學，數學科模擬考成績的以下累積次數折線圖如右（各組不含上限）：

<89 數乙>

根據上圖的資料，選出下列正確的選項。

- (1) 各班成績的中位數，甲班最高
- (2) 各班的及格人數，丙班最多（60 分（含）以上及格）
- (3) 各班 80 分（含）以上的人數，乙班最多
- (4) 各班的平均成績，丙班最差
- (5) 此次模擬考最高分，出現在乙班



解：(1) 50 位同學的中位數為 25，且甲班位於最右（約 65 分），故甲中位數最高。

(2) 甲班及格約 $50 - 19 = 31$ 人，乙班及格約 $50 - 29 = 21$ 人，

丙班及格約 $50 - 44 = 6$ 人，故甲班及格人數最多。

(3) 甲班 80 分以上約 $50 - 37 = 13$ 人，乙班 80 分以上約 $50 - 34 = 16$ 人，

丙班 80 分以上約 0 人，故乙班 80 分以上人數最多。

(4) 各班平均成績顯然丙班最差。

(5) 最高分為 100 分，出現在乙班。

故選(1)(3)(4)(5)。

二、填充題

1. 某食品實驗室混合甲、乙兩種菌類製成一種新食品。調查發現乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎。又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍（成爲原來的四倍）。現在取同數量的甲、乙兩種菌，讓它們同時繁殖，試問至少第_____天後混和甲、乙兩種菌類時，才能製造成受歡迎的食品。（已知 $\log 2 = 0.3010$ ） <89 數乙>

解：設現取相同數量的甲、乙兩菌種各 a 單位，在第 n 日後混合，

$$\text{製成受歡迎的食品，則 } \frac{a \cdot 4^n}{a \cdot 2^n} > 10^3 \Rightarrow 2^n > 10^3$$

$$\Rightarrow n \log 2 > 3 \Rightarrow n > \frac{3}{\log 2} = \frac{3}{0.3010} \approx 9.96 \text{ 故所求爲 } n = 10(\text{天}).$$

2. 王先生採收酪梨共獲 1080 粒，要打包裝箱上市。已知大箱一箱可裝 25 粒，小箱一箱可裝 8 粒；每個大箱子成本 60 元，每個小箱子成本 20 元，試問能將這 1080 粒的酪梨剛好裝完，所用箱子成本最少爲_____元。 <89 數乙>

解：設大箱用 x 個，小箱用 y 個，恰好裝完，

$$\therefore 25x + 8y = 1080, \text{ 且 } x, y \text{ 爲非負整數,}$$

$$\therefore (40, 10) \text{ 爲 } 25x + 8y = 1080 \text{ 的一組解,}$$

$$\therefore 25x + 8y = 1080 \text{ 之解可表爲 } \begin{cases} x = 40 - 8t \\ y = 10 + 25t \end{cases}, \text{ 其中 } t = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{又箱子的成本爲 } 60(40 - 8t) + 20(10 + 25t) = 2600 + 20t,$$

$$\therefore t = 0, \text{ 此時 } x = 40, y = 10, \text{ 有最少成本 } 2600 \text{ 元.}$$

3. 天干地支記日是分別以甲子、乙丑、丙寅、丁卯、戊辰、己巳、庚午、辛未、壬申、癸酉、甲戌、乙亥、丙子、丁丑、...、癸亥，六十天爲一週期循環記日，已知民國 89 年 7 月 3 日爲壬戌日，那麼推算民國 90 年 1 月 1 日以天干地支記是_____日。 <89 數乙>

解：天干以 10 爲週期，地支以 12 爲週期，若 89 年 7 月 3 日第 1 天是壬戌日，

$$\text{則 } 90 \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 1 \text{ 日是第 } 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 1 = 183 \text{ 天,}$$

$$183 \text{ 除以 } 10 \text{ 餘 } 3 \Rightarrow \text{天干爲甲}; 183 \text{ 除以 } 12 \text{ 餘 } 3 \Rightarrow \text{地支爲子, 故爲甲子.}$$

4. 某班有 50 位同學，其中男生有 30 位，女生 20 位。某次導師要抽 5 位同學留下打掃環境，依性別按人數比例做分層抽樣，則班上男同學張志明被抽中的機率是_____。

解：男：女 = 3：2 \Rightarrow 抽出男生 3 位，女生 2 位。 <89 數乙>

\Rightarrow 張志明與另 2 位男生，女生 2 位。

$$\Rightarrow \text{所求} = \frac{1 \times C_2^{29} \times C_2^{20}}{C_3^{30} \times C_2^{20}} = \frac{29 \times 28}{30 \times 29 \times 28} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

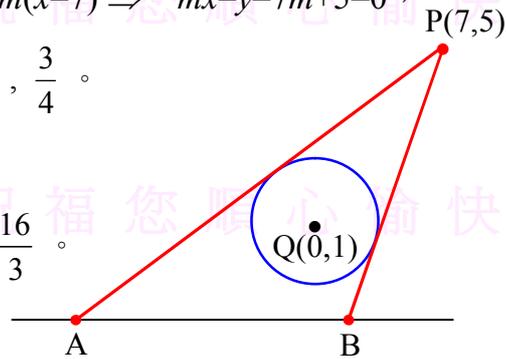
5. 在坐標平面上(7, 5)處有一光源，將圓 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 投射到 x 軸的影長為_____。

解：點 P(7, 5)在圓外，設過 P 的切線 L： $y - 5 = m(x - 7) \Rightarrow mx - y - 7m + 5 = 0$ ， <89 數乙>

$$\text{又 } d(\text{圓心}, L) = \frac{|0 - 1 + 5 - 7m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1, \text{ 解得 } m = \frac{5}{12}, \frac{3}{4}。$$

即切線 L 為 $5x - 12y = -25$ 與 $3x - 4y = 1$ ，

當 $y = 0 \Rightarrow x = -5, \frac{1}{3}$ 。故所求為 $\frac{1}{3} - (-5) = \frac{16}{3}$ 。



三、計算題

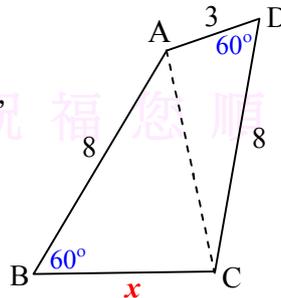
1. 已知四邊形 ABCD 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{CD} = 8$ ， $\overline{AD} = 3$ ，且 $\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$ ，試求 \overline{BC} 之長。

解：設 $\overline{BC} = x$ ，在 $\triangle BAC$ 與 $\triangle DAC$ 中， <89 數乙>

$$\Rightarrow \overline{AC}^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ 或 } x = 5, \text{ 故所求為 } 3 \text{ 或 } 5。$$



2. 某電子公司欲擴廠，新建廠房有大、中、小三種規模，建廠規模的決策與未來一年的經濟景氣有關；經濟景氣如果高度成長，則建大規模廠較有利，如果微幅成長或持平，則建中規模廠即可，如果經濟衰退，則應建小規模廠，進一步評估三種建廠規模在四種經濟景氣情況下的獲利如下： <89 數乙>

利潤 (百萬元/年)		建廠規模		
		大	中	小
景 氣 情 況	高度成長	50	40	30
	微幅成長	10	30	20
	持 平	5	10	5
	衰 退	-30	-10	-2

經分析未來一年經濟高度成長的機率 $P_1 = 0.3$ ，微幅成長的機率 $P_2 = 0.1$ ，

持平的機率 $P_3 = 0.4$ ，衰退的機率 $P_4 = 0.2$ 。試問以未來一年利潤期望值越大越好的判斷為準則，此公司選用哪一種建廠規模獲利最佳？最佳的建廠決策下，

未來一年它的利潤期望值是多少（百萬元）？

解：設未來一年中興建大(L)，中(M)，小(S)廠其利潤的期望值分別為 $E(L)$ ， $E(M)$ ， $E(S)$ ，

$$\text{則依表可得 } E(L) = 50 \times 0.3 + 10 \times 0.1 + 5 \times 0.4 - 30 \times 0.2 = 12$$

$$E(M) = 40 \times 0.3 + 30 \times 0.1 + 10 \times 0.4 - 10 \times 0.2 = 17$$

$$E(S) = 30 \times 0.3 + 20 \times 0.1 + 5 \times 0.4 - 2 \times 0.2 = 12.6$$

$$\Rightarrow E(M) > E(S) > E(L)$$

∴ 選用中規模建廠，獲利最好，其未來一年利潤的期望值為 17（百萬元）。