

<< 88 指考數乙詳解 >>

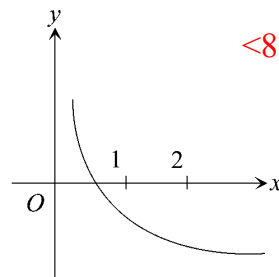
一、單選題

1. 右圖為函數 $y = a + \log_b x$ 之部分圖形，其中 a, b 皆為常數，

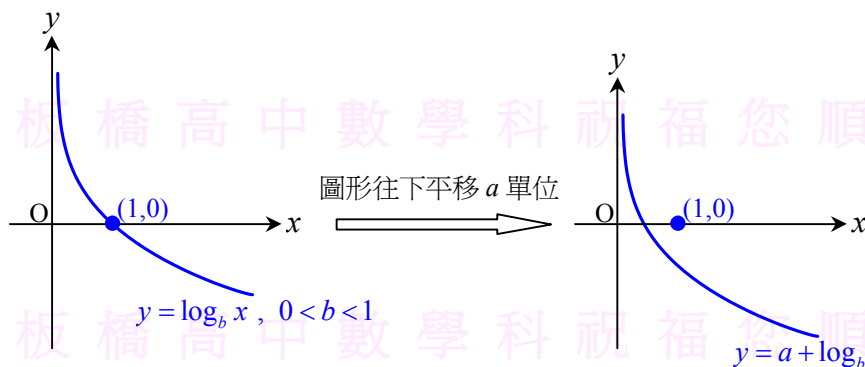
則下列何者為真？(1) $a < 0, b > 1$ (2) $a > 0, b > 1$

(3) $a = 0, b > 1$ (4) $a > 0, 0 < b < 1$ (5) $a < 0, 0 < b < 1$

解： $y = \log_b x$ 上下平移 a 單位可得 $y = a + \log_b x$ ，故選(5)。



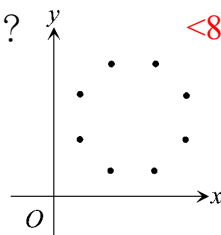
<88 數乙>



2. 下圖表兩組數據 x, y 的分布圖，試問其相關係數 r 最接近下列何值？

(1) 1 (2) 0.5 (3) 0 (4) -0.5 (5) -1

解：各點散布範圍上、下、左、右成對稱狀態，毫無向上或向下趨勢表示零相關，故選(3)。



<88 數乙>

二、多重選擇題

3. 考慮函數 $f(x) = 2 \sin 3x$ ，試問下列選項何者為真？

- (1) $-2 \leq f(x) \leq 2$ (2) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 時有最大值 (3) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$
- (4) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{\pi}{2}$ (5) $f(2) > 0$

解：(1) $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 3x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$ 。

(2) $f(\frac{\pi}{6}) = 2 \sin(3 \cdot \frac{\pi}{6}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$ 。

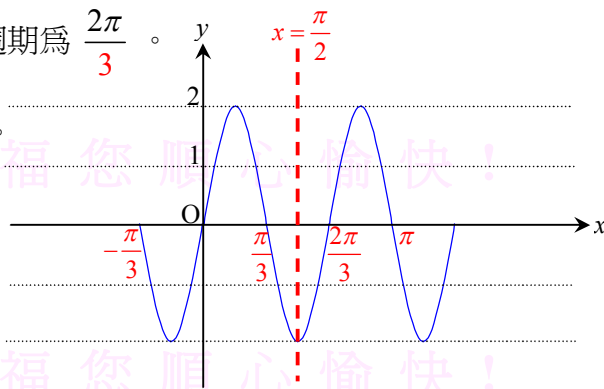
(3) $f(x) = 2 \sin x$ 的週期為 $2\pi \Rightarrow f(x) = 2 \sin 3x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$ 。

(4) 由右圖知， $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{\pi}{2}$ 。

(5) $6(\text{弧度}) = \frac{180^\circ}{\pi} \times 6 \approx 343^\circ$ (為第四象限角)

$\Rightarrow f(2) = 2 \sin 6 \approx 2 \sin 343^\circ = 2 \times \text{負數} < 0$ 。

故選(1)(2)(3)(4)。



<88 數乙>

4. 已知一橢圓的長軸平行於 x 軸，中心為 $(1, 2)$ 且通過點 $(4, 6)$ 。

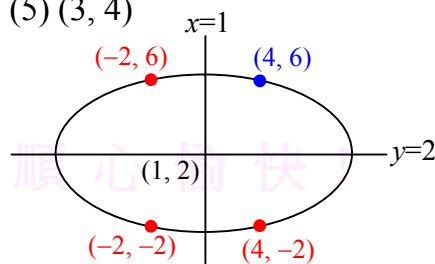
<88 數乙>

試問下列哪些點一定會在橢圓上？

- (1) $(-2, -2)$ (2) $(-2, 6)$ (3) $(4, -2)$ (4) $(5, 6)$ (5) $(3, 4)$

解：如圖，橢圓的圖形以中心點，上下與左右均對稱。

故選(1)(2)(3)。



三、填充題

1. 小明與小華相約到學校的四百公尺圓形跑道上跑步，他們在同一時間從同一地點朝相反方向開始跑，跑的速度，小明保持每分鐘 320 公尺，小華保持每分鐘 280 公尺。試問：出發後第_____秒，小明與小華會第八次相遇。

<88 數乙>

解：小明與小華背向開始跑，兩人每分鐘共跑 $320 + 280 = 600$ (公尺)，

故跑一圈僅需時 $\frac{400}{600} \times 60 = 40$ (秒)，即 40 秒後第一次相遇。

故第八次相遇為兩人共跑 8 圈所花之時間 $= 40 \times 8 = 320$ (秒)。

2. 觀察下列 3×3 與 4×4 方格中的數字規律：

如果在 10×10 的方格上，仿上面規律填入數字，

則所填入的 100 個數字之總和為_____。

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

<88 數乙>

解：總和 $S_n = 1 \times 19 + 2 \times 17 + 3 \times 15 + \dots + 10 \times 1$

$$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (21 - 2k) = \sum_{k=1}^{10} (21k - 2k^2) = 21 \sum_{k=1}^{10} k - 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 = 21 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385。$$

3. 若 a, b 均為整數且方程式 $x^2 - ax + 817 = 0$ 與 $x^2 - bx + 3553 = 0$ 有一共同的質數根，則數對 $(a, b) =$ _____。

<88 數乙>

解：利用輾轉相除法，可得 $(817, 3553) = 19$ ，則 $817 = 19 \times 43$ ， $3553 = 19 \times 187$ ，

$$(1) x^2 - ax + 817 = 0 \Rightarrow (x - 19)(x - 43) = 0 \Rightarrow x^2 - 62x + 817 = 0 \quad \therefore a = 62。$$

$$(2) x^2 - bx + 3553 = 0 \Rightarrow (x - 19)(x - 187) = 0 \Rightarrow x^2 - 206x + 3553 = 0 \quad \therefore b = 206。$$

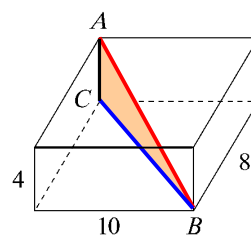
故所求數對 $(a, b) = (62, 206)$ 。

4. 設一長方體的長、寬、高分別為 10 單位、8 單位、4 單位，則其任意兩頂點間最長的距離為_____單位。

<88 數乙>

解：如圖， $\overline{AB} > \overline{BC} > 10$ ，且 $\overline{AB}$ 即為所求，

$$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{164 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}。$$



5. 在空間中，已知平面 E 通過 $(3, 0, 0)$ ， $(0, 4, 0)$ 及正 z 軸上一點 $(0, 0, a)$ ，<88 數乙>
如果平面 E 與 xy 平面的夾角成 45 度，那麼 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解： 設 $E: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{a} = 1$ ，令 $\vec{n}_E = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{a})$ ， xy 平面法向量 $\vec{n}_{xy} = (0, 0, 1)$ ，

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{xy}|}{|\vec{n}_E| |\vec{n}_{xy}|} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{a})^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \pm \frac{12}{5} \text{ (取正)}, \text{ 故所求 } a = \frac{12}{5}。$$

6. 當使用一儀器去測量一個高為 70 單位長的建築物 50 次，所得數據為<88 數乙>

測量值	68 單位長	69 單位長	70 單位長	71 單位長	72 單位長
次數	5	15	10	15	5

根據此數據推測，假如再用此儀器測量該建築物三次，
則三次測得的平均值為 71 單位長的機率為 。

解： 三次平均為 71 的有三類： $(69, 72, 72)$ ； $(70, 71, 72)$ ； $(71, 71, 71)$ 。

又 69 單位的機率為 $\frac{3}{10}$ ，70 單位的機率為 $\frac{2}{10}$ ，71 單位的機率為 $\frac{3}{10}$ ，

72 單位的機率為 $\frac{1}{10}$ ，

故三次測得平均為 71 單位長的機率為

$$= \left(\frac{3}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{3!}{2!} \right) + \left(\frac{2}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} \times 3! \right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \right) = \frac{72}{1000} = \frac{9}{125}。$$

7. 某市爲了籌措經費而發行彩券，該市決定每張彩券的售價爲 10 元，且每發行一百萬張彩券，即附有一百萬元獎一張，十萬元獎 9 張，一萬元獎 90 張，一千元獎 900 張。假設某次彩券共發行三百萬張，試問當你購買一張彩券時，你預期會損失 元。<88 數乙>

解： 機率分配如下：

獎金(元)	1000000	100000	10000	1000
機率	$\frac{3 \times 1}{3000000}$	$\frac{3 \times 9}{3000000}$	$\frac{3 \times 90}{3000000}$	$\frac{3 \times 900}{3000000}$

$$\Rightarrow \text{買一張中獎的期望值} = 1000000 \times \frac{3 \times 1}{3000000} + 100000 \times \frac{3 \times 9}{3000000} + 10000 \times \frac{3 \times 90}{3000000} + 1000 \times \frac{3 \times 900}{3000000} \\ = 3.7 \text{ (元)}。$$

所以損失 $10 - 3.7 = 6.3$ (元)。

四、計算題

1. 如下圖所示，每個小方格的邊長為 1，圓 O 的圓心為 O ，半徑為 $\frac{1}{2}\overline{AO}$ ，<88 數乙>

$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 均為圓 O 的切線，切點分別為 C 點與 D 點。

- (1) 試求 $\angle COD$ 。 (2) 求線段 $\overline{AC}$ 、圓弧 $\widehat{CD}$ 及線段 $\overline{DB}$ 的長度之和。

解： (1) $\overline{AO} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，圓半徑 $= \overline{OC} = \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{AO} = 2\sqrt{2}$ ，

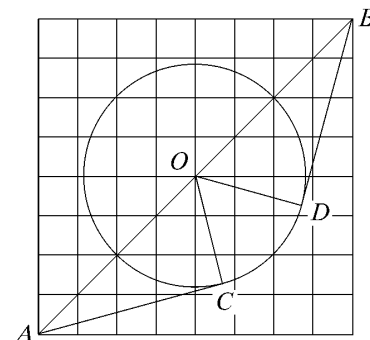
$\triangle AOC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\overline{AO} : \overline{CO} = 2 : 1$ ，

$\Rightarrow \angle OAC = 30^\circ$ ， $\angle AOC = 60^\circ$ ，

同理， $\angle BOD = 60^\circ$ ，故 $\angle COD = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ 。

(2) $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{32 - 8} = 2\sqrt{6}$ ，

$\Rightarrow \overline{AC} + \widehat{CD} + \overline{DB} = 2\sqrt{6} + 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{60}{360} + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ 。



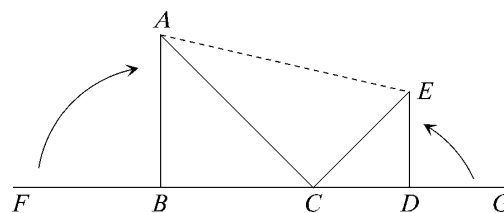
2. 如右圖所示， $\overline{FG}$ 是一條長 4 公尺的鐵絲， C 是線段 $\overline{FG}$ 上的一點，<88 數乙>

將 $\overline{CG}$ 圍成另一個等腰直角三角形 CDE ，

將 $\overline{CF}$ 圍成另一個等腰直角三角形 CBA 。

- (1) 試說明梯形 $ABDE$ 的面積與 C 點的位置無關。

- (2) 求梯形 $ABDE$ 的面積。



解： (1) 設 $\overline{AB} = x$ ， $\overline{DE} = y$

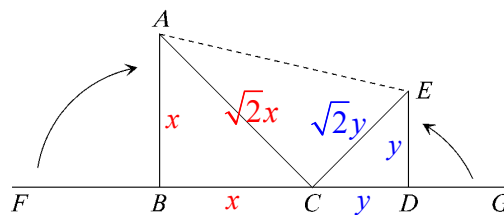
$\Rightarrow (x + x + \sqrt{2}x) + (y + y + \sqrt{2}y) = 4$

$\Rightarrow (2x + \sqrt{2}x) + (2y + \sqrt{2}y) = 4$

$\Rightarrow x + y = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} = 2(2 - \sqrt{2})$ 為一定值。

故梯形 $ABDE$ 之面積 $= \frac{1}{2}(x + y)(x + y) = \frac{1}{2}(x + y)^2$ 為一定值，與 C 點的位置無關。

(2) 梯形 $ABDE$ 之面積 $= \frac{1}{2}(x + y)^2 = \frac{1}{2}(2(2 - \sqrt{2}))^2 = 2(4 - 4\sqrt{2} + 2) = 12 - 8\sqrt{2}$ 。



板橋高中數學科祝福您順心愉快！

板橋高中數學科祝福您順心愉快！