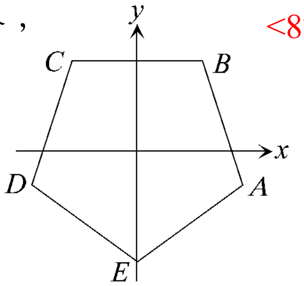
<< 87 指考數乙詳解 >>

一、單選題

1. 設 $ABCDE$ 是坐標平面上一個正五邊形，它的中心與原點重合，且頂點 E 在 y 軸的負向上（如下圖所示），試問下列各直線中，斜率最小者為何？ <87 數乙>



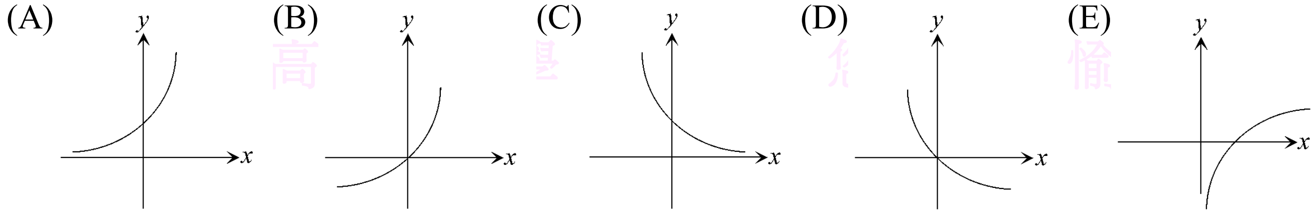
(1) 直線 AB　(2) 直線 BC　(3) 直線 CD
(4) 直線 DE　(5) 直線 EA

解： 斜率為正的有，直線 CD，EA，且較傾斜的為 CD $\Rightarrow 0 < m_{EA} < m_{CD}$ 。
斜率為 0 的為直線 BC $\Rightarrow m_{BC} = 0$ 。
斜率為負的有 DE，AB，且較傾斜的為 AB $\Rightarrow m_{AB} < m_{DE} < 0$。
所以斜率最小為直線 AB，**故選(1)**。

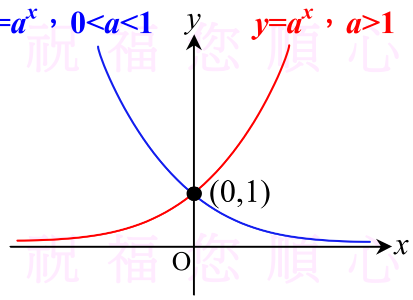
二、多重選擇題

2. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，則下列圖形中，何者可能是指數函數 $y = a^x$ 的部分圖形？ <87 數乙>

(A) (B) (C) (D) (E)



解： 指數函數 $y = a^x$ 的圖形如右所示：
故選(1)(3)。



3. 設 a 與 b 為實數，關於二元二次方程式 $x^2 + ay^2 + 2bx - 4y = 0$ 的圖形 Γ，下列哪些敘述是正確的？ <87 數乙>

(1) 若 $a = 0$ 且 $b = 0$，則 Γ 是一拋物線　(2) 若 Γ 是一條拋物線，則 $a = 0$ 且 $b = 0$
(3) 若 Γ 是一圓，則 $a = 1$　(4) 若 Γ 是一橢圓，則 $a > 0$ 且 $a \neq 1$
(5) 若 Γ 是一雙曲線，則 $a < 0$

解： (1) $a = b = 0 \Rightarrow x^2 = 4y$ 為一拋物線。
(2) 反例：$a = 0$ 而 $b = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = 4y \Rightarrow (x+1)^2 = 4y + 1$ 為一拋物線。
(3) Γ 是一個圓，則 x^2，y^2 係數必相等 $\Rightarrow a = 1$ 。
(4) Γ 是一個橢圓，則 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。
(5) Γ 是雙曲線，x^2，y^2 係數必異號 $\Rightarrow a < 0$ 。
故選(1)(3)(4)(5)。

4.下列哪些敘述是正確的？ <87 數乙>

(1) 在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(2) 在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行

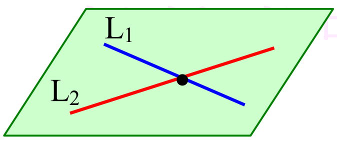
(3) 在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線（仍在該平面上）

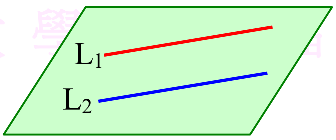
(4) 在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線

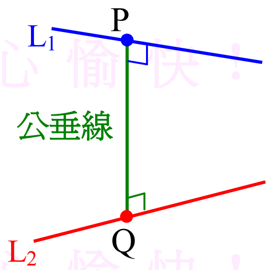
(5) 在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面（公垂面是指與該兩平面都垂直的平面）

解：空間中兩相異直線 L_1 與 L_2 的關係恰有三種：

(1) 相交於一點(相交)　　(2) 共平面不相交(平行)　　(3) 不共平面(歪斜)

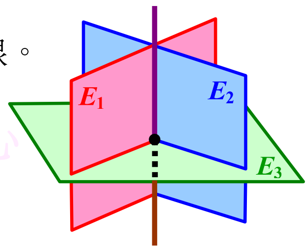






(1)正確，(2)錯誤：在平面上，兩相異直線不相交，則必平行；
但在空間中，則可能平行，亦可能是歪斜。

(3)錯誤，(4)正確：在平面上，兩相交直線沒有公垂線；
但在空間中，不論相交、平行或歪斜皆有公垂線。



(5)正確：在空間中，相交的兩平面(E_1、E_2)交成一直線 L，
作一平面與此直線垂直(如右圖)，
則此平面(E_3)即爲兩平面之公垂面。

故選(1)(4)(5)。

三、填充題

1. 若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$的商式爲 $x+2$，餘式爲 $2x-1$，則 $f(x)=$__________。

解：$(x^3+4x^2+5x-3)=f(x)(x+2)+2x-1$ <87 數乙>

$\Rightarrow f(x)=[(x^3+4x^2+5x-3)-(2x-1)]\div(x+2)=x^2+2x-1$。

2. 設數列 $<a_n>$ 前 n 項的和 $a_1+a_2+\dots+a_n=2^{n+1}\bullet(n^2-2n)$， <87 數乙>

則此數列的第 n 項 $a_n=$__________。

解：$a_1=2^2(1^2-2)=-4$，

$n\geq 2$ 時，$\boxed{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}+a_n=2^{n+1}(n^2-2n)$ ……①，

$\boxed{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}=2^n[(n-1)^2-2(n-1)]=2^n(n^2-4n+3)$ ……②，

② − ① 得 $a_n=2^n[2(n^2-2n)-(n^2-4n+3)]=2^n(n^2-3)$，

但 $n=1$ 時，亦等於上式　∴　$a_n=2^n(n^2-3)$。

3. 欲將八位新生平均分發到甲、乙、丙、丁四班，共有__________種分法。 <87 數乙>

解： $\left(\underset{分(2,2,2,2)四堆}{C^8_2\times C^6_2\times C^4_2\times C^2_2}\right)\times \underset{四堆數目相同}{\frac{1}{4!}}\times\left(\underset{給甲}{4}\times\underset{給乙}{3}\times\underset{給丙}{2}\times\underset{給丁}{1}\right)=2520$。

4. 若三平面 $5x+y+2z=-1$，$5x-7y+z=-18$ 與 $3x-y+z=a$ 相交於一直線， <87 數乙>
則 $a=$__________。

解： $\begin{cases}5x+y+2z=-1\\5x-7y+z=-18\end{cases}$ 令 $y=0$，則 $z=17$ ，$x=-7$ 。

將 $(-7, 0, 17)$ 代入 $3x-y+z=a$ $\Rightarrow -21+17=a$，故所求 $a=-4$。

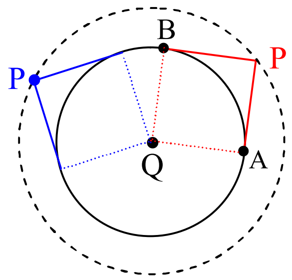
5. 一圓的方程式爲 $x^2+y^2-8x+4y-5=0$，考慮此圓任意兩條互相垂直切線的交點，所有這種交點所成圖形的方程式爲__________。 <87 數乙>

解： $x^2+y^2-8x+4y-5=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y+2)^2=25$。

互相垂直的切線交點 P 與圓心 Q，切點 A、B 四點共圓，

則 PAQB 爲邊長 5 的正方形，且 $\overline{PQ}=5\sqrt{2}$ ，

故所求爲以 $\overline{PQ}=5\sqrt{2}$ 爲直徑的圓 ：$(x-4)^2+(y+2)^2=50$。

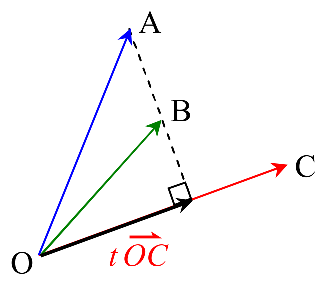


6. 設 A$(a,1)$，B$(2,b)$與 C$(3,4)$爲坐標平面上三點，而 O 點爲原點。 <87 數乙>

若向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向上的正射影相同，則 a 與 b 滿足的關係式爲__________。

解： $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向上的正射影爲 $\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}\right)\overrightarrow{OC}=\dfrac{(3a+4)}{25}(3,4)$

$\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向上的正射影爲 $\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}\right)\overrightarrow{OC}=\dfrac{(6+4b)}{25}(3,4)$



因爲有相同的正射影， 故 $\dfrac{(3a+4)}{25}=\dfrac{(6+4b)}{25}\Rightarrow 3a-4b=2$ 。

7. 擲三枚相同且均勻的銅板一次，則在至少出現一個正面條件下，恰好出現兩個正面的機率為__________。 <87 數乙>

解： 令 A 表至少一正面的事件

$\Rightarrow$ A={正正正，正正反，正反正，反正正，正反反，反正反，反反正}。

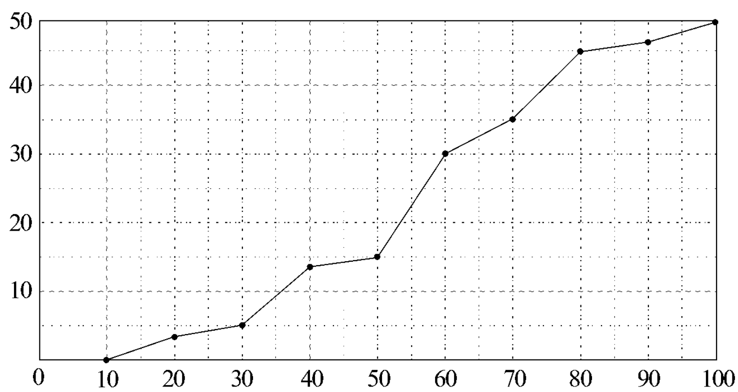
令 B 表恰好出現兩個正面的事件 $\Rightarrow$ B={正正反，正反正，反正正}。

$$所求 = P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{3}{7}$$ 。

8. 某班 50 位同學數學科成績的以下累積次數分配曲線如下圖所示： <87 數乙>

則其成績的中位數為______。

（取到整數，小數點以下四捨五入）



解： $\frac{50}{2} = 25$

$\Rightarrow$ 中位數在 50～60 這一組內，且這一組內有 $30 - 15 = 15$ 人，

$$故所求中位數 = 50 + \frac{25-15}{15}\times 10$$

$$= 50 + \frac{20}{3} \approx 57\ (分)$$ 。

四、計算題

1. 若實數 x 滿足 $1 + \log_4(x-1) = \log_2(x-9)$，試求 x 的值。 <87 數乙>

解： $1 + \log_4(x-1) = \log_2(x-9) \Rightarrow \log_4 4(x-1) = \log_4(x-9)^2$，

$$\therefore \begin{cases} x-1>0 \\ x-9>0 \\ 4(x-1)=(x-9)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>9 \\ (x-17)(x-5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>9 \\ x=17 \text{ 或 } 5 \end{cases} \Rightarrow x=17$$ 。

2. 設 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，□$BCDE$ 是以 $\overline{BC}$ 為一邊向外作出的正方形。 <87 數乙>

若 $\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=4$，$\overline{AB}=3$，試求：(1) $\cos(\angle ACD)$。 (2) $\triangle ACD$ 的面積。

解： (1) $\cos(\angle ACD) = \cos(90°+\theta)$

$$= \cos(90°-(-\theta)) = \sin(-\theta) = -\sin\theta = -\frac{3}{5}$$ 。

(2) $\sin(\angle ACD) = \sin(90°+\theta)$

$$= \sin(90°-(-\theta)) = \cos(-\theta) = \cos\theta = \frac{4}{5}$$ ，

$$\Delta ACD面積 = \frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}\sin(90°+\theta) = \frac{1}{2}\times 4\times 5\times\frac{4}{5} = 8$$ 。