<< 105 指考數甲詳解 >>

一、單選題

1. 請問下列選項中哪一個數值 a 會使得 x 的方程式 $\log a-\log x=\log(a-x)$ 有兩相異實數解？

(1) a=1 (2) a=2 (3) a=3 (4) a=4 (5) a=5 <105 數甲>

解： $a>0$，$x>0$，$a-x>0 \Rightarrow a>x>0$

原式 $\Rightarrow \log\dfrac{a}{x}=\log(a-x) \Rightarrow \dfrac{a}{x}=a-x \Rightarrow a=ax-x^2 \Rightarrow x^2-ax+a=0$

$\because$ 有兩相異實根 $\therefore D=(-a)^2-4a>0 \Rightarrow a(a-4)>0 \Rightarrow a>4$ 或 $a<0$ (不合)。 **故選(5)。**

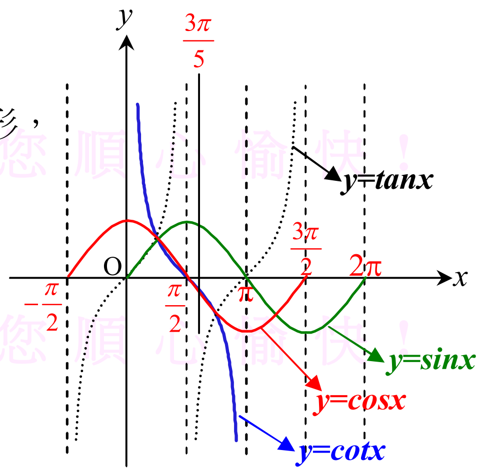
2. 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$？ <105 數甲>

(1) $\sin(2.6\pi)$ (2) $\tan(2.6\pi)$ (3) $\cot(2.6\pi)$ (4) $\sec(2.6\pi)$ (5) $\csc(2.6\pi)$

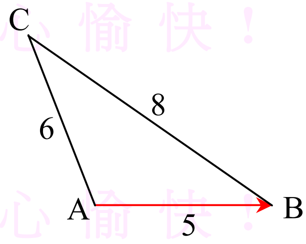
解： $\cos(2.6\pi)=\cos(2\pi+\dfrac{3}{5}\pi)=\cos\dfrac{3}{5}\pi=\cos 108°$

分別作函數 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的圖形，如圖，在 x=108°附近，$\cos(108°)\approx\cot(108°)$。

故選(3)。



3. 假設三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=6$。請選出和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的內積為最大的選項。(1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\overrightarrow{BC}$ (4) $\overrightarrow{CB}$ (5) $\overrightarrow{AB}$ <105 數甲>



解： (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=5\times6\times\dfrac{5^2+6^2-8^2}{2\times5\times6}=-\dfrac{3}{2}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(180°-B)$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|(-\cos B)=5\times8\times(-\dfrac{5^2+8^2-6^2}{2\times5\times8})=-\dfrac{53}{2}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{53}{2}$

(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2=5^2=25$。 **故選(4)。**

4. 假設 a，b 皆為非零實數，且坐標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

(1) 在 x 軸上　　(2) 在 y 軸上　　(3) 在第一象限　　(4) 在第四象限

(5) 當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限

解： $\begin{cases} y=ax^2+bx \\ y=ax+b \end{cases} \Rightarrow ax^2+bx=ax+b \Rightarrow ax^2+(b-a)x-b=0$

$\because$兩圖形相切　$\therefore\ D=(b-a)^2-4\times a\times(-b)=0 \Rightarrow (b+a)^2=0 \Rightarrow b=-a$

代回 $ax^2-2ax+a=0 \Rightarrow a(x-1)^2=0$

$\because a\neq 0\ \therefore x=1 \Rightarrow$ 此時 $y=a+b=0$，即切點為(1, 0)。　**故選(1)**。

二、多選題

5. 在坐標空間中，點 $P(2, 2, 1)$是平面 E 上距離原點 $O(0, 0, 0)$最近的點。請選出正確的選項。

(1) 向量 $\overrightarrow{v}=(1,-1,0)$ 為平面 E 的法向量

(2) 點 P 也是平面 E 上距離點(4, 4, 2)最近的點

(3) 點(0, 0, 9)在平面 E 上

(4) 點(2, 2, −8)到平面 E 的距離為 9

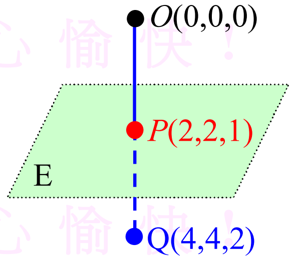
(5) 通過原點和點(2, 2, −8)的直線與平面 E 會相交

解： (1) $\overline{OP}\perp E \Rightarrow \overrightarrow{OP}=(2,2,1)$為法向量，又 $\overrightarrow{v}=(1,-1,0)\not\parallel\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{v}$ 不為法向量

(2) $P(2, 2, 1)$為 Q(4, 4, 2)與(0, 0, 0)的中點 $\Rightarrow\ \overline{QP}\perp E$

(3) 取 $\overrightarrow{n}=(2,2,1)$，設$E$：$2x+2y+z=k$，將 $P(2,2,1)$ 代入得 $k=9 \Rightarrow E$：$2x+2y+z-9=0$

$\therefore$點(0, 0, 9)在平面 E 上



(4) 設 R(2, 2, −8)$\Rightarrow d(R,\ E)=\dfrac{|2\times2+2\times2-8-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{3}=3$

(5) $\overrightarrow{OR}=2(1,1,-4) \Rightarrow$ 令 $\overleftrightarrow{OR}:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-4t \end{cases}$，代入 $E \Rightarrow 2t+2t-4t-9=0$

$\Rightarrow -9=0$ (不合)，即 L 與 E 不相交。　**故選(2)(3)**。

6. 坐標平面上一矩形，其頂點分別爲 $A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。設二階方陣 M 爲在坐標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C。請選出正確的選項。

(1) M 定義的線性變換是鏡射變換

(2) $M\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

(3) M 定義的線性變換將 C 映射到 D 且將 D 映射到 A

(4) M 的行列式值爲 -1

(5) $M^3=-M$

解： $M\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow M\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow M=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{12}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}0 & -18\\ 8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$$

(1) $M=\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$ $\Rightarrow M$ 不是鏡射變換。

(2) $M\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ -2\end{bmatrix}$(表 D 點)，$\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$(表 A 點)

(4) $\det(M)=\begin{vmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3} & 0\end{vmatrix}=0-(-1)=1$

(5) $M^2=\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I\Rightarrow M^3=M^2\times M=-I\times M=-M$

故選(2)(3)(5)。

7. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A、B 移動的距離分別為 1、4，且 A、B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 c_n 為第 n 秒時 A、B 的中點位置。請選出正確選項。

(1) $c_1=\frac{5}{2}$　(2) $c_2>c_1$　(3) 數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$　(5) $c_{1000}>2$

解： 設 a_n，b_n 分別為第 n 秒時 A，B 的位置 $\Rightarrow c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$

(1) $a_1=1$，$b_1=8-4=4\Rightarrow c_1=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$

(2) $a_2=1+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$b_2=8-4-4\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\Rightarrow c_2=\frac{3/2+8/3}{2}=\frac{25}{12}\Rightarrow c_2-c_1=\frac{25}{12}-\frac{5}{2}=-\frac{5}{12}<0$

(3) $a_n=1+1\times\frac{1}{2}+1\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+1\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1\times[1-(1/2)^n]}{1-(1/2)}=2(1-\frac{1}{2^n})=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

$b_n=8-4[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}]=8-4\times\frac{1\times[1-(1/3)^n]}{1-(1/3)}=8-6\times(1-\frac{1}{3^n})=2+\frac{6}{3^n}$

$\Rightarrow c_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)=\frac{1}{2}[(2-\frac{1}{2^{n-1}})+(2+\frac{6}{3^n})]=2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n-1}}$

$\Rightarrow c_{n+1}-c_n=(2-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^n})-(2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n-1}})=(2-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^n})-(2-\frac{2}{2^{n+1}}+\frac{3}{3^n})=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^n}$

$\Rightarrow\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 不是等比數列

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n-1}})=2$

(5) $c_{1000}=2-\frac{1}{2^{1000}}+\frac{1}{3^{999}}=2-(\frac{1}{2^{1000}}-\frac{1}{3^{999}})=2-\text{正數}<2$。**故選(1)(4)**。

三、選填題

A. 投擲一枚均勻銅板8次。在最初兩次的投擲中曾經出現過正面的條件下，
8次投擲中恰好出現3次正面的條件機率為__________。

解： P(前2次有正面)=P(正反+反正+正正) $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

P(前2次有正面且8次中恰有3次正面)

$$=\left(\underset{\text{正反}(\Delta\Delta\Delta\Delta\text{正正})}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot C^6_2(\frac{1}{2})^6}\right)+\left(\underset{\text{反正}(\Delta\Delta\Delta\Delta\text{正正})}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot C^6_2(\frac{1}{2})^6}\right)+\left(\underset{\text{正正}(\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\text{正})}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot C^6_1(\frac{1}{2})^6}\right)=\frac{15}{256}+\frac{15}{256}+\frac{6}{256}=\frac{36}{256}=\frac{9}{64}$$

$\Rightarrow$ 所求 $=\frac{9/64}{3/4}=\frac{9}{64}\times\frac{4}{3}=\frac{3}{16}$ 。

B. 設 $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$、$\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$、$\overrightarrow{w}=(x,y,z)$ 為空間中三個向量，且向量 $\overrightarrow{w}$ 與向量 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ 平行。

若行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix}=-12$，則 $\overrightarrow{w}=$__________。

解： $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}\right)=(-2,\ 4,\ -2)=-2(1,\ -2,\ 1)\Rightarrow\overrightarrow{w}=(x,\ y,\ z)//(1,\ -2,\ 1)$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\x&y&z\end{vmatrix}=3y-2x-(-y+2z)=-2x+4y-2z=-2(x-2y+z)=-12\Rightarrow x-2y+z=6$$

令 $x=k,\ y=-2k,\ z=k\Rightarrow x-2y+z=k-2(-2k)+k=6\Rightarrow k=1$

$\Rightarrow\overrightarrow{w}=(x,\ y,\ z)=(1,\ -2,\ 1)$ 。

C.在所有滿足 $z-\bar{z}=-3i$ 的複數 z 中（其中 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），
$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$ 的最小值為__________。

解： 設 $z=x+yi$ ，x、$y\in R\Rightarrow\bar{z}=x-yi$

則 $z-\bar{z}=2yi=-3i\Rightarrow y=-\frac{3}{2}\Rightarrow z=x-\frac{3}{2}i$

$$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|=\left|\sqrt{7}+8i-(x-\frac{3}{2}i)\right|=\left|(\sqrt{7}-x)+\frac{19}{2}i\right|=\sqrt{(\sqrt{7}-x)^2+(\frac{19}{2})^2}$$

當 $x=\sqrt{7}$，所求最小值 $=\sqrt{(\frac{19}{2})^2}=\frac{19}{2}$ 。

D.一圓盤分成標有數字 0、1 的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率爲$\frac{1}{4}$，而停在不同區域的機率爲$\frac{3}{4}$。遊戲規則爲連續轉動指針三次，計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。若遊戲前指針的位置停在標號數字爲 1 的區域，則此遊戲的期望值爲＿＿＿＿＿＿。

解： 數字和爲 3 $\Rightarrow$ 數字依序爲 $(1,\ 1,\ 1) \Rightarrow P_3=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

數字和爲 2 $\Rightarrow$ 數字依序爲 $(1,1,0)$，$(1,0,1)$，$(0,1,1) \Rightarrow P_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{21}{64}$

數字和爲 1 $\Rightarrow$ 數字依序爲 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1) \Rightarrow P_1=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{39}{64}$

數字和爲 0 $\Rightarrow$ 數字依序爲 $(0,0,0) \Rightarrow P_0=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

所求期望值 $=E(X)=\frac{1}{64}\times 3+\frac{21}{64}\times 2+\frac{39}{64}\times 1+\frac{3}{64}\times 0=\frac{21}{16}$ 。

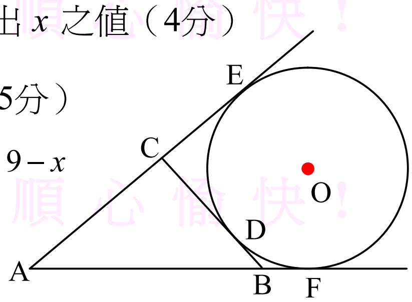
第貳部分：非選擇題

一、如圖，已知圓O與直線BC、直線AC、直線AB均相切，且分別相切於D、E、F。

又 $\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=6$。

(1) 假設 $\overline{BF}=x$，試利用 x 分別表示$\overline{BD}$，$\overline{CD}$ 以及$\overline{AE}$，並求出 x 之值（4分）

(2) 若將$\overrightarrow{AD}$表示成 $\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$，，則 α，β 之值爲何？（5分）



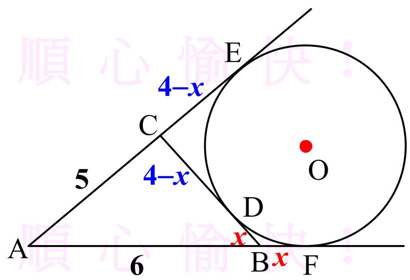
解：(1) $\overline{BD}=\overline{BF}=x$，$\overline{CD}=4-x$，$\overline{CE}=4-x$，$\overline{AE}=5+(4-x)=9-x$

又$\overline{AE}=\overline{AF} \Rightarrow 5+(4-x)=9-x \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

(2) $\overline{BD}=x=\frac{3}{2}$，$\overline{CD}=4-x=\frac{5}{2} \Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\frac{3}{2}:\frac{5}{2}=3:5$

ΔABC 中， 由 $\overline{BD}:\overline{CD}=3:5$

$\Rightarrow$ 分點公式得 $\overrightarrow{AD}=\frac{5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+5} \Rightarrow \alpha=\frac{5}{8}$，$\beta=\frac{3}{8}$ 。

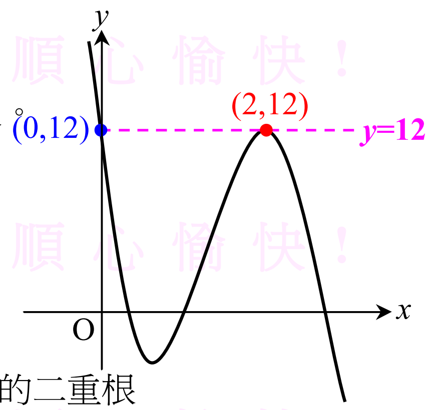


二、設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 a。已知在 $0\le x\le 3$ 的範圍中，$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$，$x=2$ 兩處。另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，以及對任意實數 $s, r\ (s\le r)$，$\int_s^r f(t)dt = G(r)-G(s)$ 恆成立，且函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有（相對）極值。

(1) 試描繪 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形，在圖上標示 $(0, f(0))$、$(2, f(2))$，並由此說明 a 為正或負。（4分）

(2) 試求方程式 $f(x)-12=0$ 的實數解（如有重根須標示），並利用 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，求 a 之值。（5分）

(3)在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，求 $G(x)$ 之最小值。（6分）



解：(1) 在 $0\le x\le 3$ 中，$f(x)$ 的最大值12發生在 $x=0$，$x=2$ 兩處，

其可能圖形如右所示，

由圖知 $f(x)$ 的右端為右下降 $\Rightarrow a<0$

(2) 設三次式 $h(x)=f(x)-12 \Rightarrow \begin{cases} h(0)=f(0)-12=0 \\ h(2)=f(2)-12=0 \end{cases}$

則 $h(x)=ax(x-2)^2$ $\because$ 由圖知 $x=2$ 為 $h(x)=f(x)-12=0$ 的二重根

$\Rightarrow f(x)-12=ax(x-2)^2 \Rightarrow f(x)=ax(x-2)^2+12$

$\because \int_s^r f(t)dt = G(r)-G(s) \quad \therefore G'(x)=f(x)$

又 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值 $\Rightarrow G'(1)=0 \Rightarrow f(1)=a(-1)^2+12=0 \Rightarrow a=-12$。

(3) $G'(x)=f(x)=-12x(x-2)^2+12=-12(x^3-4x^2+4x-1)$

$$=-12(x-1)(x^2-3x+1)=-12(x-1)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

由反導數知：$G(x)=-12\left(\frac{1}{4}x^4-4\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{2}x^2-x+0\right)$ $\because G(0)=0$

$=-3x^4+16x^3-24x^2+12x$，其圖形增減如下：

x	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		**1**	**2**	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
$f'(x)$	+	**0**	−	**0**	+	**0**	−
增減	↗		↘		↗		↘

當 $0\le x\le 2$，$G(x)$ 的極小值為 $G(0)$ 與 $G(1)$

又 $G(0)=0$，$G(1)=-3x^4+16x^3-24x^2+12x=-3+16-24+12=1$

故所求最小值為 $G(0)=0$。