<< 97 指考數甲詳解 >>

一、單選題

1. 已知正整數 n 可以寫成兩個整數的平方和。試問 n 除以 8 的餘數不可能爲以下哪一選項？

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 5 (5) 6 <97 數甲>

解：若正整數 x、y 除以 a 的餘數分別爲 r_1，r_2，

$\Rightarrow (x^2+y^2)$ 除以 a 的餘數 $=$ $(r_1{}^2+r_2{}^2)$ 除以 a 的餘數。

∵所有整數除以 8 的餘數爲 0，1，2，…，7，

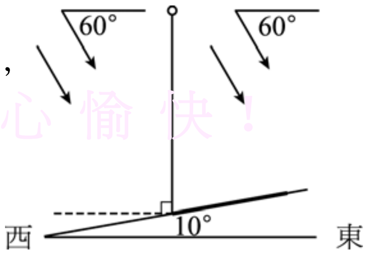
又 $3^2 \div 8 \cdots 1$，$4^2 \div 8 \cdots 0$，$5^2 \div 8 \cdots 1$，$6^2 \div 8 \cdots 4$，$7^2 \div 8 \cdots 1$，

∴所有整數的平方除以 8 的餘數爲 0，1，4 。

又$(0+0) \div 8 \cdots 0$，$(0+1) \div 8 \cdots 1$，$(0+4) \div 8 \cdots 4$，$(1+1) \div 8 \cdots 2$，$(1+4) \div 8 \cdots 5$，$(4+4) \div 8 \cdots 0$，

$\Rightarrow$平方和除以 8 的餘數爲 0，1，2，4，5 。

2. 在與水平面成 10°的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角 60°平行投射在山坡上時，旗竿的影子長爲 11 公尺，如右圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）。請問旗竿的長度最接近以下哪一選項？



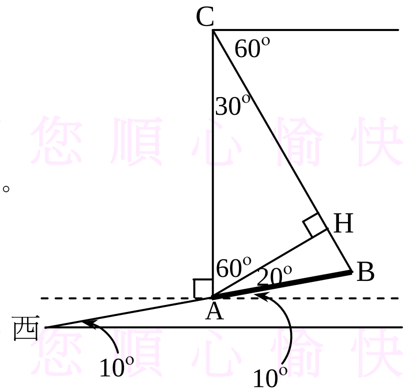
(1) 19.1 (2) 19.8 (3) 20.7 (4) 21.1 (5) 21.7 公尺。

參考數值：$\sin 10^\circ \approx 0.174$，$\sin 20^\circ \approx 0.342$，$\cos 10^\circ \approx 0.985$，$\cos 20^\circ \approx 0.940$，$\sqrt{3} \approx 1.732$。 <97 數甲>

解：如圖：$\overline{AH} = \overline{AB} \times \cos 20^\circ \approx 11 \times 0.940 = 10.34$ ，

$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \Rightarrow$ 旗竿的長度 $\overline{AC} = \dfrac{\overline{AH}}{\sin 30^\circ}$

$= \dfrac{10.34}{1/2} = 20.68 \approx 20.7$ 。



故選(3)。

二、多選題

3. 設 A 爲坐標平面上代表旋轉某個角度的二階方陣，且已知 $A^6=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$， <97 數甲>

試問 A 可能是以下哪些選項中的方陣?

(1) $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}\cos\frac{5}{3}\pi&-\sin\frac{5}{3}\pi\\\sin\frac{5}{3}\pi&\cos\frac{5}{3}\pi\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}\cos\frac{5}{6}\pi&\sin\frac{5}{6}\pi\\-\sin\frac{5}{6}\pi&\cos\frac{5}{6}\pi\end{bmatrix}$

解：令 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，則 $A^6=\begin{bmatrix}\cos 6\theta&-\sin 6\theta\\\sin 6\theta&\cos 6\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\pi&-\sin\pi\\\sin\pi&\cos\pi\end{bmatrix}$，

$\Rightarrow 6\theta=\pi+2k\pi\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi+2k\pi}{6}$ ，且 $k\in Z$

(1) $k=1\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$。

(3) $k=0\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6}&-\sin\frac{\pi}{6}\\\sin\frac{\pi}{6}&\cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$。

(5) $k=-3\Rightarrow\theta=-\dfrac{5}{6}\pi\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)&-\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\\\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)&\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{5}{6}\pi&\sin\frac{5}{6}\pi\\-\sin\frac{5}{6}\pi&\cos\frac{5}{6}\pi\end{bmatrix}$

又 (2) 與 (4) 找不到 k 的對應整數解。 **故所求爲(1)(3)(5)。**

4. 甲、乙、丙三人參加一投擲公正銅板的遊戲，每一局三人各擲銅板1次；在某局中，當有一人投擲結果與其他二人不同時，此人就出局且遊戲終止；否則就進入下一局，並依前述規則繼續進行，直到有人出局爲止。試問下列哪些選項是正確的？ <97數甲>

(1) 第一局甲就出局的機率是$\frac{1}{3}$　(2) 第一局就有人出局的機率是$\frac{1}{2}$

(3) 第三局才有人出局的機率是$\frac{3}{64}$　(4) 已知到第十局才有人出局，則甲出局的機率是$\frac{1}{3}$

(5) 該遊戲在終止前，至少玩了六局的機率大於$\frac{1}{1000}$

解： 遊戲終止的機率$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{正反反}}\cdot C^3_1\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{正正反}}\cdot C^3_2\right)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$遊戲進入下一局的機率$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$。

(1) P(第一局甲出局)$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{正(甲)反反}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{正正反(甲)}}\right)=\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$。

(2) P(第一局有人出局)=P(第一局遊戲就終止)$=\frac{3}{4}$。

(3) 第三局才有人出局的機率$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$。

(4) 第十局才有人出局的機率$=(\frac{1}{4})^9\cdot\frac{3}{4}$，甲在第十局出局的機率$=(\frac{1}{4})^9\cdot\frac{1}{4}$。

$\Rightarrow P(\text{甲出局}\mid\text{第十局有人出局})=\dfrac{P(\text{甲出局}\cap\text{第十局有人出局})}{P(\text{第十局有人出局})}=\dfrac{(\frac{1}{4})^9\cdot\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4})^9\cdot\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$。

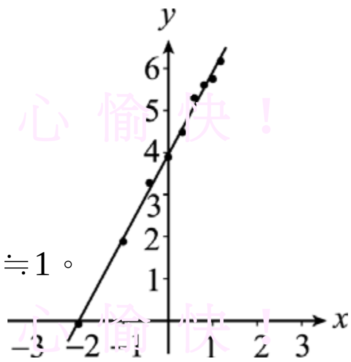
(5) P(至少玩了六局)=P(前5局都通過)$=(\frac{1}{4})^5=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}$。

故所求爲(3)(4)。

5. 某人進行一實驗來確定某運動之距離 d 與時間 t 的平方或立方成正比，所得數據如下：

時間t（秒）	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
距離d（呎）	0.95	3.69	9.71	14.88	22.32	39.34	48.68	53.65	71.79

爲探索該運動的距離與時間之關係，令 $x=\log_2 t$，$y=\log_2 d$，即將上述的數據 (t, d) 分別取以2爲底的對數變換，例如：(2, 53.65)變換後成爲(1, 5.74)。已知變換後的數據 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_9,y_9) 之散佈圖及以最小平方法所求得變數 y 對變數 x 的最適合直線（或稱迴歸直線）爲 $y=a+bx$，如下圖所示：試問下列哪些選項是正確的？ <97數甲>



(1) 若 $d=14.88$，則 $3<\log_2 d<4$　　(2) x 與 y 的相關係數小於 0.2

(3) 由右圖可以觀察出 $b>2.5$　　(4) 由右圖可以觀察出 $a>2$

(5) 由右圖可以確定此運動之距離與時間的立方約略成正比。

解： (1) 若 $d=14.88 \Rightarrow 8<14.88<16 \Rightarrow 3<\log_2 d<4$ 。

(2) 由圖知 x 與 y 的關係非常接近線性變換，其相關係數 $r \fallingdotseq 1$。

(3) 由圖知：迴歸線 L 接近通過 A(−2, 0)與 B(0, 4)

$$\Rightarrow m_L \approx m_{AB}=\frac{4-0}{0-(-2)}=2 \text{ ，} \therefore\ b \fallingdotseq 2<2.5 \text{ 。}$$

(4) a 表 L 之 y 截距，$\therefore\ a \fallingdotseq 4>2$ 。

(5) 令 $L: y=4+2x \Rightarrow \log_2 d=4+2\log_2 t \Rightarrow \log_2 d=\log_2\left(2^4\cdot t^2\right) \Rightarrow d=16t^2$ ，

$\therefore$ 距離與時間的平方略成正比。

故所求爲(1)(4)。

6. 設 n 爲正整數，方程式 $x^2-2x-n=0$ 的兩根爲 a_n 與 b_n 且 $a_n>b_n$。

試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_n>0$ 對所有 n 皆成立　　(2) $a_n+b_n=2$ 對所有 n 皆成立

(3) $b_{n+1}>b_n$ 對所有 n 皆成立　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{n}=1$　　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=2$　　<97 數甲>

解： $x^2-2x-n=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+4n}}{2}=1\pm\sqrt{n+1}$ ，又二根 $a_n>b_n \Rightarrow a_n=1+\sqrt{n+1}$ ，$b_n=1-\sqrt{n+1}$ 。

(1) 對所有 $n\in\mathbf{N}$，$a_n=1+\sqrt{n+1}>1+\sqrt{1+1}=1+\sqrt{2}>0$ 。

(2) $a_n+b_n=(1+\sqrt{n+1})+(1-\sqrt{n+1})=2$ 。

(3) $b_{n+1}-b_n=(1-\sqrt{n+2})-(1-\sqrt{n+1})=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}<0 \Rightarrow b_{n+1}<b_n$ 。

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{n+1})(1+\sqrt{n+2})}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}+1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\right)=\sqrt{1+0+0}+\sqrt{0}+\sqrt{0}+0=1 \text{ 。}$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{1+\frac{1}{n}}=2 \text{ 。}$$

故所求爲(1)(2)(4)(5)。

7. 設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數，已知 $y=f'(x)$的圖形是一個通過點(1, 0)和點(2, 0)且開口向上的拋物線。試問下列哪些選項是正確的？ <97 數甲>

(1) $f(x)$ 一定是三次多項式　　(2) $f(x)$ 在 $1<x<2$ 的範圍內必爲遞增

(3) $f(x)$一定恰有兩個極值　　(4) $f(x)=0$ 一定有三個實根

(5) $f(x)=0$ 在 $1\le x\le 2$ 的範圍內一定有實根。

解：$\because$ $\deg f'(x)=2\Rightarrow \deg f(x)=3$ 且 $f'(1)=0$，$f'(2)=0$，可設 $f'(x)=a(x-1)(x-2)$，其中 $a>0$。

$\Rightarrow$ $y=f(x)$ 的圖形有兩條水平切線。

x		1		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
增減	↗		↘		↗

(1) $\deg f'(x)=2\Rightarrow \deg f(x)=3$ 。

(2) $f(x)$ 在 $1<x<2$ 的範圍內必爲遞減。

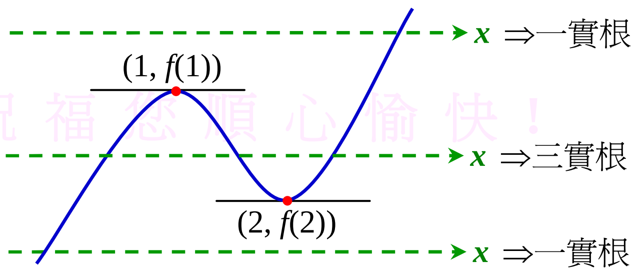
(3) 兩條水平切線 $\Rightarrow f(x)$恰有兩個極值。

且 $f(1)$爲極大值，$f(2)$爲極小值。

(4) 圖形與 x 軸的交點在不同位置時，將有一實根與三實根 2 種情形。

(5) 圖形與 x 軸的交點在 $1\le x\le 2$ 的範圍時，才會有實根。

故所求爲**(1)(3)**。



8. 在坐標平面上，設拋物線Γ 通過點 (8, 4)，且其對稱軸爲直線 $x-2=0$。試問下列哪些選項是正確的?

(1) 若拋物線 Γ 的頂點坐標爲 (2, 1)，則其焦點坐標必爲 (2, 4)

(2) 若拋物線 Γ 焦點坐標爲 (2, 12)，則其頂點坐標必爲 (2, 3)

(3) 若拋物線 Γ 也通過點 (10, 11)，則其準線方程式必爲 $y+6=0$

(4) 直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的頂點。

(5) 直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的焦點。 <97 數甲>

解：$\because$ 對稱軸爲 $x-2=0$，設頂點$(2, k)$，焦點$(2, k+c)$，且Γ：$(x-2)^2=4c(y-k)$ ⋯ ①

又 Γ 過 $(8, 4)\Rightarrow$ $9=c(4-k)$ ⋯ ②

(1) 若頂點爲(2, 1)，代入② 得 $9=c(4-1)\Rightarrow c=3\Rightarrow$焦點爲(2, 4)。

(2) 若焦點爲(2, 12) $\Rightarrow k+c=12$，代入② 得 $9=(12-k)(4-k)\Rightarrow k=3$ 或 13。

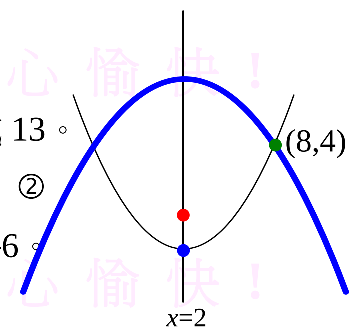
(3) 若Γ 過(10, 11)，代入① 得 $16=c(11-k)$ ⋯ ③，又 $9=c(4-k)$ ⋯ ②

解②③聯立得 $k=-5$，$c=1\Rightarrow$頂點(2, −5)，焦點(2, −4)，準線 $y=-6$。

(4) $\because$ Γ 過(8, 4)，$\therefore$ 頂點坐標不可能爲 (2, 4)。

(5) 設直線 $x-2=0$ 上一點$(2, t)$爲焦點，則Γ 過(8, 4) $\Rightarrow \overline{PF}=\sqrt{36+(t-4)^2}\ge 6$ 。

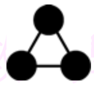
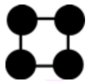
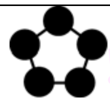
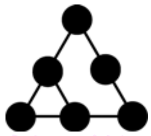
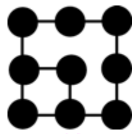
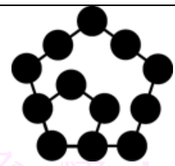
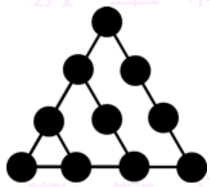
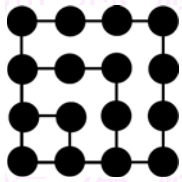
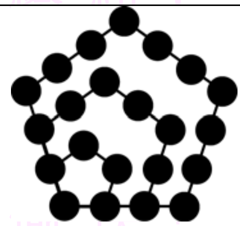
$\Rightarrow$必有準線 L 滿足 $\overline{PF}=d(P,L)$ 。



故選**(1)(3)(5)**。

三、選填題

9. 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊 1 個鋼珠			
每邊 2 個鋼珠			
每邊 3 個鋼珠			
每邊 4 個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；

且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。

求 n，m 之值。 <97 數甲>

解：設每邊 n 個鋼珠的正三角形、正方形、正五邊形陣各需 a_n、b_n、c_n 個鋼珠。

則 $a_n = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ； $b_n = n\cdot n = n^2$ ； $1+4+7+\cdots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$ 。

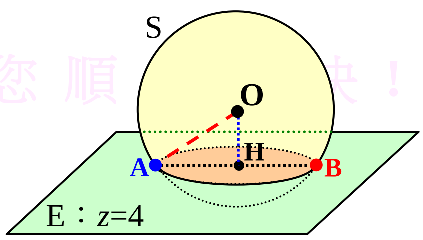
又 $a_n + b_n = c_n + 9 \Rightarrow m = \dfrac{n(n+1)}{2} + n^2 = \dfrac{n(3n-1)}{2} + 9$ ，

解得 n=9，且 $m = \dfrac{9(3\times 9-1)}{2} + 9 = 126$ 。

10. 若空間中一球面 S 與兩平面 z=4 及 z=8 相交的圓面積皆為 36π， <97 數甲>

求 S 與平面 z=7 相交的圓面積。

解：球面 S 與兩平面 z=4 及 z=8 之交圓面積皆為 36π ，



則球心必在 z=4 及 z=8 之中間的平面 z=6 上，

$\Rightarrow \overline{OH} = 2$，$\overline{AH} = 6 \Rightarrow$ 球半徑 $R = \overline{OA} = \sqrt{40}$ 。

又 z=7 與球心距離為 1，

且 S 與平面 z=7 相交的圓半徑 $= \sqrt{(\sqrt{40})^2 - 1^2} = \sqrt{39}$ 。

故所求圓面積 $= \pi(\sqrt{39})^2 = 39\pi$ 。

第貳部分：非選擇題

1. 設 $p(x)$為三次實係數多項式函數，其圖形通過(1, 3)，(–1, 5)兩點。 <97 數甲>

若 $p(x)$的圖形在點(1, 3)的切線斜率為 7，而在點(–1, 5)的切線斜率為–5，試求 $p(x)$。

解：設 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow p'(x)=3ax^2+2bx+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(1)=a+b+c+d=5 \\ p(-1)=-a+b-c+d=5 \\ p'(1)=3a+2b+c=7 \\ p'(-1)=3a-2b+c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-2 \\ d=1 \end{cases}$$

，故所求 $p(x)=x^3+3x^2-2x+1$ 。

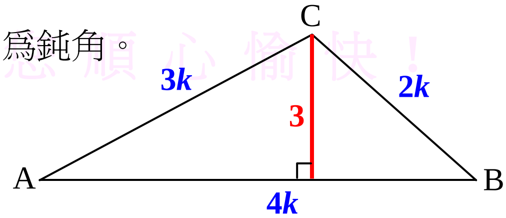
2. 設ΔABC 的三高分別為 $\overline{AD}=6$、$\overline{BE}=4$、$\overline{CF}=3$，

(1) 試證：ΔABC 是一鈍角三角形。 (2) 試求ΔABC 的面積。 <97 數甲>

解：(1) 令 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b \Rightarrow \frac{1}{2}a\times\overline{AD}=\frac{1}{2}b\times\overline{BE}=\frac{1}{2}c\times\overline{CF}$

$\Rightarrow 6a=4b=3c \Rightarrow a:b:c=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=2:3:4$

$\Rightarrow 4^2>2^2+3^2$，故ΔABC 是一鈍角三角形，且∠C 為鈍角。



(2) ΔABC 中， $\cos A=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\times 3k\times 4k}=\frac{7}{8}$

$\Rightarrow \sin A=\sqrt{1-(\frac{7}{8})^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3}{3k} \Rightarrow k=\frac{8}{\sqrt{15}}$ 。

$\Rightarrow \Delta ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 3k\times 4k\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{4}\times k^2=\frac{3\sqrt{15}}{4}\times\frac{64}{15}=\frac{16\sqrt{15}}{5}$ 。